Final de Lógica 2007

1. V o F, justifique.

   (a) En el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\emptyset,(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset))}$ se tiene que $[\varphi] \leq [\psi]$ se da cuando $\{\mathbf{A} : \mathbf{A} \models \varphi\} \subseteq \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \models \psi\}$.

   (b) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-álgebras, y supongamos $\mathbf{A}$ es subálgebra de $\mathbf{B}$. Sea $\varphi = \varphi(v) \in F^{\tau}$, y supongamos que $\mathbf{A} \models \exists v\ \varphi(v)$. Entonces $\mathbf{B} \models \exists v\ \varphi(v)$.

   (c) Si no se da que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $\mathbf{A} \not\models \varphi$, para cada modelo $\mathbf{A}$ de (Σ, τ).

   (d) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-álgebras. Si S es subuniverso de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ entonces hay S_1 y S_2 subuniversos de A y B respectivamente tales que $S = S_1 \times S_2$.

2. Sea $\tau = (\{0,1\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Definamos:

   $x\, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}\, y = \max(x, y)$

   $x\, \mathsf{i}^{\mathbf{A}}\, y = \min(x, y)$

   $0^{\mathbf{A}} = 0$

   $1^{\mathbf{A}} = 10$

   De una descripción de las congruencias del álgebra $\mathbf{A}$, en particular, diga cuantas hay.

3. Sea $\tau = (\{c\}, \{f^1\}, \emptyset, a)$ y sea Σ el conjunto formado por los axiomas:

   $\forall x_1, x_2\ (f(x_1) \equiv f(x_2) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$

   $f(c) = c$

   Calcule cuantos modelos no isomorfos de la teoría (Σ, τ) hay con universo $\{0, 1, 2, 3\}$. Justifique.

4. Sea $\tau = (\emptyset, \{\cdot^2, g^2\}, \emptyset, a)$ y sea Σ el siguiente conjunto de axiomas:

   $\forall x, y\ g(x,y) \cdot x = x \cdot g(x,y)$

   $\forall x, z \exists y\ g(x,y) = z$

   De una prueba de $(\Sigma, \tau) \vdash \forall x, y\ x \cdot y = y \cdot x$.