Final de Lógica 2008

1. V o F, justifique.

   (a) Sea (Σ, τ) una teoría consistente, y sea $\varphi = \forall x, y\ (x \equiv y)$. Entonces $[\varphi]$ es un átomo del álgebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\Sigma,\tau)}$.

   (b) Sea **A** una τ-álgebra y sean B y C subuniversos de A. Entonces $B \cap C$ es subuniverso de **A**.

   (c) El poset $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}) - \{\{a, b\}\}, \subseteq)$ es un reticulado distributivo.

   (d) Sean **A** una τ-álgebra, θ una congruencia de **A** y φ una sentencia de tipo τ. Si $\mathbf{A} \models \varphi$ entonces $\mathbf{A}/\theta \models \varphi$.

2. Sea τ el tipo de las álgebras de Boole, y sea **B** la τ-álgebra $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cap, \cup, ^c, \emptyset, \{a, b, c\})$. Para cada elemento de B decida si es definible o no. Justifique.

3. Sean **A** y **B** τ-álgebras, y supongamos $b \in B$ es tal que $\{b\}$ es subuniverso de **B**. Sean $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$ términos de tipo τ. Pruebe que si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \forall x, y\ (p \equiv q \rightarrow t \equiv s)$, entonces $\mathbf{A} \models \forall x, y\ (p \equiv q \rightarrow t \equiv s)$. ¿Es cierto esto si removemos la hipótesis de que **B** tiene un subuniverso de un elemento?

4. Sea $\tau = (\{c\}, \{+^2, f^2\}, \emptyset, a)$ y sea Σ el conjunto formado por las siguientes sentencias

   $\exists x, y\ (c \equiv x + y)$

   $\forall x, y, z\ (f(x + y, z) \equiv f(x, z) + f(y, z))$

   $\forall x \exists z\ (x \equiv f(c, z))$

   De una prueba formal que atestigüe que

   $$(\Sigma, \tau) \vdash \forall x \exists z, w\ (x \equiv z + w).$$