Final de Lógica 2008

1. V o F, justifique.

   (a) Supongamos que φ es una sentencia de tipo τ tal que hay, salvo isomorfismo, un solo modelo de tipo τ que satisface φ. Entonces $[\varphi]$ es un átomo del álgebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\emptyset,\tau)}$.

   (b) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-álgebras. Si $\mathbf{C}$ es una subálgebra de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tal que $\mathbf{C}$ es isomorfa a $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{B}$ tiene una subuniverso con un sólo elemento.

   (c) Hay un modelo de tipo τ cuyo universo tiene 7 elementos, y tal que exactamente 6 de sus elementos son definibles.

   (d) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-álgebras y φ una sentencia de tipo τ. Si $\mathbf{A} \not\models \varphi$ y $\mathbf{B} \not\models \varphi$ entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \not\models \varphi$.

2. Para la siguiente formula de tipo $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{q^3, p^2\}, a)$ encuentre una equivalente en forma normal prenexa

$$(\exists w(q(w,z,u) \equiv w) \rightarrow (\exists x\ q(x,u,y) \vee \forall y\ p(y,w))).$$

   Enuncie los lemas que utilice.

3. Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole finita y sea I un ideal de $\mathbf{B}$.

   (a) Pruebe que $\theta(I) = \{(a,b) \in B : \text{hay } c \in I \text{ tal que } a \,\mathsf{s}\, c = b \,\mathsf{s}\, c\}$ es una congruencia de $\mathbf{B}$.

   (b) Pruebe que $b/\theta(I)$ es un átomo de $\mathbf{B}/\theta(I)$ si y solo si hay un átomo a de $\mathbf{B}$ tal que $a \notin I$ y $b/\theta(I) = a/\theta(I)$.

4. De una prueba formal que atestigüe que

$$(\Sigma_{Ret}, \tau_{Ret}) \vdash \forall x,y,z\,(x \,\mathsf{s}(y \,\mathsf{s}\, z) \equiv (x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{s}\, z)\,.$$