Final de Lógica 2008

1. V o F, justifique.

   (a) La teoría $(\{\varphi_1, \varphi_2\}, (\emptyset, \emptyset, \leq^2, a))$ donde
   $\varphi_1 = \forall x, y \exists z \ (\leq(x,z) \wedge \neg (x \equiv z)) \wedge (\leq(z,y) \wedge \neg (z \equiv y))$
   $\varphi_2 = \exists x, y, z \forall w \ (x \equiv w \vee y \equiv w \vee z \equiv w)$
   es consistente.

   (b) Sea τ el tipo de los reticulados. Sea $\varphi = \exists x \forall y \ t(x,y) = s(x,y)$ donde $t = t(x,y)$ y $s = s(x,y)$ son términos de tipo τ. Si $\mathbf{A}$ es un reticulado (pensado como modelo de tipo τ) tal que $\mathbf{A} \models \varphi$, entonces hay un subreticulado finito $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{B} \models \varphi$.

   (c) Sea T la teoría que resulta de agregarle a *Arit* un nuevo nombre de función unario f y el axioma $\forall x \ f(x).f(x) = x$. Entonces $T \vdash (0 \equiv 1)$.

   (d) Si T es consistente entonces $\mathcal{A}_T$ tiene al menos dos elementos.

2. Sea $O = O(x_1, ..., x_n)$ una fórmula sin cuantificadores de un tipo algebraico τ. Sea $\mathbf{A}$ una τ-álgebra y $\mathbf{B}$ subálgebra de $\mathbf{A}$. Pruebe que para todo $b_1, ..., b_n \in B$ vale que $\mathbf{A} \models O(b_1, ..., b_n)$ implica $\mathbf{B} \models O(b_1, ..., b_n)$.

3. Un *reticulado distributivo pseudocomplementado* será una 6-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, p, 0, 1)$ tal que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado y la operación p es tal que

   $\forall x \ x \ \mathsf{i} \ p(x) = 0$

   $\forall x, z \quad (x \ \mathsf{i} \ z = 0 \rightarrow z \leq p(x))$

   Note que $p(a)$ es el mayor elemento de L el cual infimado con a da 0.

   (a) Muestre que para todo reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ que sea una cadena hay una (y solo una) operación p tal que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, p, 0, 1)$ es un reticulado distributivo pseudocomplementado

   (b) Pruebe que si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, p, 0, 1)$ es un reticulado distributivo pseudocomplementado entonces

      i. $p(a \ \mathsf{s} \ p(a)) = 0$ para cada $a \in L$.