Final de Lógica 2008

1. V o F, justifique.

    (a) Sea $\varphi = \varphi(x_1) \in F^\tau$. Entonces $\forall x_1 \forall x_2\ (\varphi(x_1) \wedge (x_1 \equiv x_2)) \rightarrow \varphi(x_2))$ es universalmente válida.

    (b) Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r^2\}, a)$. En el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\emptyset,\tau)}$ se tiene que $[\exists x \forall y\ r(x,y)] < [\forall y \exists x\ r(x,y)]$.

    (c) Hay un modelo de tipo τ cuyo universo tiene 7 elementos, y tal que exactamente 6 de sus elementos son definibles.

    (d) Toda teoría ecuacional es consistente.

2. Sea $\tau = (\{c, d\}, \emptyset, \{r^1\}, a)$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son modelos de tipo τ tales que:

    $c^{\mathbf{A}} = 0$ y $d^{\mathbf{A}} = 1$

    $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$.

    Para cada sentencia φ con a lo sumo un cuantificador se tiene $\mathbf{A} \models \varphi$ sii $\mathbf{B} \models \varphi$.

    Pruebe que $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

3. Para la siguiente formula de tipo $\tau = (\{c\}, \{fun^2, gun^3\}, \{rel^2, rol^3\}, a)$ encuentre una equivalente en forma normal prenexa

    $(\forall x_1 (func(x_1, x_3) \equiv gun(x_4, c, x_2)) \rightarrow (\exists x_4\, rol(x_4, x_3, x_2) \wedge \forall x_2\, rel(x_2, x_4)))$.

    Enuncie los lemas que utilice.

4. Sea $\tau = (\{1, c, d\}, \{s^2, i^2, f^2\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea Σ igual al resultado de agregarle a Σ_{ret} los siguientes axiomas:

    $\forall x\ x \leq 1$

    $\exists y \forall z (y \leq z \rightarrow f(z, c) \equiv 1)$

    $\exists y \forall z (y \leq z \rightarrow f(z, d) \equiv 1)$

    $\forall x \forall y \forall z (f(z, x \mathrel{i} y) \equiv f(z, x) \mathrel{i} f(z, y))$

    Dar una prueba que atestigüe que:

    $(\Sigma, \tau) \vdash \exists z (f(z, c \mathrel{i} d) \equiv 1)$.