Final de Lógica 2008

1. V o F, justifique.

   (a) Sea $P \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, y supongamos $(P, \subseteq)$ es un reticulado. Entonces la operación ínfimo del reticulado $(P, \subseteq)$ es la operación intersección de conjuntos.

   (b) Por definición una teoría (Σ, τ) es inconsistente si hay una sentencia φ de tipo τ tal que $(\Sigma, \tau) \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

   (c) Si $(\varphi \rightarrow \psi)$ no es universalmente válida entonces en el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\emptyset,(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset))}$ se tiene que $[\varphi] \not\leq [\psi]$.

   (d) Sea θ una congruencia del reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. Si $(0,1) \in \theta$, entonces $\theta = L \times L$.

2. Sea $\tau = (\emptyset, \{\cdot^2\}, \{r^1\}, a)$ y sea Σ el conjunto formado por los axiomas:

   $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z)$

   $\forall x \exists y \ (y \cdot y \equiv x \wedge r(y))$

   $\forall y \ (r(y) \rightarrow (\forall x \ x \cdot y \equiv y \cdot x))$

   De una prueba formal que atestigüe que $(\Sigma, \tau) \vdash \forall x, y \ (x \cdot y \equiv y \cdot x)$.

3. Sea $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo. Sea c_N un nombre de cte. que no pertenece a $\mathcal{C}$, y tal que $\tau_N = (\mathcal{C} \cup \{c_N\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Dado un modelo $\mathbf{A}$ de tipo τ y un $a \in A$, con $(\mathbf{A}, a)$ denotaremos el modelo de tipo τ_N con universo igual a A y tal que

   $c^{(\mathbf{A},a)} = c^{\mathbf{A}}$, para todo $c \in \mathcal{C}$

   $c_N^{(\mathbf{A},a)} = a$

   $f^{(\mathbf{A},a)} = f^{\mathbf{A}}$, para todo $f \in \mathcal{F}$

   $r^{(\mathbf{A},a)} = r^{\mathbf{A}}$, para todo $r \in \mathcal{R}$.

   (a) Si $\varphi(v)$ es una formula de tipo τ, entonces

   $(\mathbf{A}, a) \models \varphi(c_N)$ si y sólo si $\mathbf{A} \models \varphi[a]$

   (b) Toda sentencia de tipo τ_N es de la forma $\varphi(c_N)$, con $\varphi = \varphi(v)$, una formula de tipo τ.

4. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-álgebras, y sean $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ términos de tipo τ. Pruebe que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen la sentencia $\varphi = \exists x \forall y \ (p \equiv q)$, entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi$.