Final de Lógica 2011

1. V o F, Justifique.

   (a) Las fórmulas $\forall x \exists y(\varphi(x) \to \psi(y))$ y $\exists y \forall x(\varphi(x) \to \psi(y))$ son equivalentes.

   (b) Sean $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}'$ reticulados finitos. Si $\mathbf{L}$ es un subreticulado de $\mathbf{L}'$ entonces el número de congruencias de $\mathbf{L}'$ es mayor al de $\mathbf{L}$.

   (c) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-álgebras y sea $\varphi = \varphi(x)$. Entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi[(a,b)]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[a]$ y $\mathbf{B} \models \varphi[b]$.

   (d) Sea (Σ, τ) una teoría consistente, y sea $\varphi = \forall x, y\ (x \equiv y)$. Entonces $[\varphi]$ es un átomo del álgebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\Sigma,\tau)}$.

2. (a) Defina cuando un elemento a es definible en un modelo $\mathbf{A}$.

   (b) Sea $\tau = (\{c\}, \{f^2\}, \emptyset, a)$ y

   $$\varphi = \exists y\, (f(x,y) \equiv c)\,.$$

   Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-álgebras, $a \in A$ y $b \in B$ tales que a es definible en $\mathbf{A}$ via φ, y b es definible en $\mathbf{B}$ via φ. Pruebe que (a,b) es definible en $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ via φ.

3. Sea $\tau = (\emptyset, \{f^2\}, \{r^1\}, a)$ y sea $\Sigma = \{\forall x \forall y\ ((r(x) \wedge r(y)) \to x \equiv y)\}$.

   (a) Dar una prueba que atestigüe que

   $$(\Sigma,\tau) \vdash \forall x, y, z\ (\exists u\ (r(u) \wedge x \equiv f(u,z)) \wedge \exists v\ (r(v) \wedge y \equiv f(v,z))) \to x \equiv y$$

   (b) Describa la relación de dependencia de constantes en la prueba dada en el punto a.

4. Sea $\tau = (\{c,d\}, \{f^1\}, \{r^1\}, a)$ y sea Σ formado por las siguientes sentencias:

   $\neg(c \equiv d)$

   $\forall x\ (r(x) \to (x \equiv c \vee x \equiv d))$

   $f(c) = d \wedge f(d) \equiv c$

   $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4\ (x_1 \equiv x_2 \vee x_1 \equiv x_3 \vee x_1 \equiv x_4 \vee x_2 \equiv x_3 \vee x_2 \equiv x_4 \vee x_3 \equiv x_4)$.

   Encuentre todos los modelos de la teoría (Σ, τ) salvo isomorfismos.