Parcial II de Lógica 2009

1. V o F. Justifique.

F a. Sea A un modelo de tipo τ, y sean $a, b \in A$ $a \neq b$ tales que para toda fórmula sin cuantificadores $\varphi = \varphi(x)$ vale que $A \vDash \varphi[a]$ sii $A \vDash \varphi[b]$. Entonces a no es definible en A.

F b. Sea A una $(\emptyset, \{f^1\}, \emptyset, a)$-álgebra. Supongamos $Im(f^A) = \{a, b\}$, con $a \neq b$. Entonces si una congruencia θ de A no contiene al par (a, b) se tiene que $\theta = \{(x, x) : x \in A\}$.

c. Sea $\tau = (\emptyset, \{f^1\}, \emptyset, a)$, y sea A una τ-álgebra finita tal que f^A es biyectiva. Sea A′ la τ-álgebra con universo A y $f^{A'} = \left(f^A\right)^{-1}$. Entonces toda congruencia de A es congruencia de A′.

d. Sean $\varphi, \psi \in F^\tau$, con $\varphi = \varphi(x_1)$ y $\psi = \psi(x_2)$. Si $(\forall x_1 \varphi \leftrightarrow \forall x_2 \psi)$ es universalmente válida entonces $\varphi \sim \psi$.

2. Sea $\tau = (\emptyset, \{s, i\}, \emptyset, a)$, con $a(s) = a(i) = 2$. Sea $A = (\{0, 1, 2\}, \max, \min)$, y sea B la subálgebra de $A \times A$ con universo $B = A \times A - \{(0, 2)\}$. Pruebe que todo elemento de B es definible.

3. Sea $\tau = (\emptyset, \{f^2\}, \emptyset, a)$, y sean A y B τ-álgebras tales que $\{A, B\} \vDash \forall z \exists xy\ f(x, y) = z$. Pruebe que $A \times B \vDash \forall z \exists xy\ f(x, y) = z$.