MATEMÁTICA DISCRETA I

Examen Final - 19/07/2012

Nota:

Apellido y Nombre:

Justificar todas las respuestas.

Parte Teórica (30 pts.)

Resolver tres de los siguientes puntos:

(1) Demostrar que existen infinitos números primos. → ?

(2) Probar que en un grafo G, la suma de las valencias de los vértices es igual al doble del número de aristas.

(3) Probar que

$$\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n},$$

si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \leq m$.

(4) Dado $n \in \mathbb{N}$, defina congruencia módulo n y demuestre que si $a \equiv a_1(n)$ y $b \equiv b_1(n)$ entonces $a \cdot b \equiv a_1 \cdot b_1(n)$.

Parte Práctica (70 pts.)

(1) (*10 pts.*)

(a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación lineal de congruencias

$$15x \equiv 21 \quad (6).$$

(b) Dar todas las soluciones x de la ecuación del punto anterior tal que $100 < x < 106$.

(2) (*15 pts.*) En una fiesta hay doce estudiantes, cinco chicas y siete chicos. ¿De cuántas maneras pueden formar una fila si

(a) no hay restricciones?

(b) las cinco chicas están juntas (en un bloque)?

(c) no hay dos chicas juntas?

(d) entre los chicos A y B no hay otros chicos y hay exactamentes tres chicas?

(3) (*10 pts.*) Demostrar por inducción que la siguiente igualdad se verifica para todo $t \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{t} i^2 = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$$

(4) (*5 pts.*) Calcular la división de $z_1 = 3 + 2i$ por $z_2 = 5 + i$.

(5) (*10 pts.*) Expresar el número 1 como combinación lineal entera de los números 101 y 104.

(6) (*5 pts.*) Demuestre que si G es un grafo tal que todos sus vérices tienen valencia 33, entonces el númuero de aristas de G es divisible por 11.

(7) (*15 puntos*) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda. Resuelva 3 de los siguientes 4 ejercicios.

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

(b) ¿Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

Como $a|c \Rightarrow c = aq$ con $q \in \mathbb{Z}$

Como $b|c \Rightarrow c = bq'$ con $q' \in \mathbb{Z}$

Esto por hipotesis, entonces

$c \cdot c = aq \cdot bq'$

$c^2 = ab(q \cdot q')$

$ab \mid c^2$