

MATEMÁTICA DISCRETA I
Examen Final - 02/08/2012

Apellido y Nombre:
Comisión:

Nota:

Justificar todas las respuestas.

Parte Teórica (30 pts.)

Resolver tres de los siguientes puntos:

- (1) Enunciar el Teorema Fundamental de la Aritmética y demostrar la parte de existencia.
- (2) (a) Definir caminata y circuito euleriano en un grafo G .
(b) Dar condiciones suficientes y necesarias para que un grafo conexo G admita una caminata euleriana. ¿Y para un circuito euleriano?
- (3) Demostrar que el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es igual a 2^n .
- (4) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(a, n) = 1$. Enunciar y demostrar el teorema que describe las soluciones de la ecuación lineal $ax \equiv b \pmod{n}$.

Parte Práctica (70 pts.)

- (1) (10 pts.)
(a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación lineal de congruencias
$$65x \equiv 39 \pmod{26}.$$

(b) Dar todas las soluciones x de la ecuación del punto anterior tal que $150 < x < 161$.
- (2) (15 pts.) En una curso hay veinte estudiantes, trece chicas y siete chicos. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una mesa circular si
 - (a) no hay restricciones?
 - (b) los siete chicos están juntos (en un bloque)?
 - (c) no hay dos chicos juntos?
 - (d) entre los chicos A y B no hay otros chicos y hay exactamente tres chicas?
- (3) (10 pts.) Demostrar por inducción que la siguiente igualdad se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}.$$
- (4) (5 pts.) Calcular
$$\frac{5+7i}{5+2i}$$
- (5) (10 pts.) Expresar el número 44 como combinación lineal entera de los números 330 y 242.
- (6) (5 pts.) Calcular $(1234)_7 + (101)_7 - (205)_7$.
- (7) (15 puntos) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda. Resuelva 3 de los siguientes 4 ejercicios.
 - (a) Sean a y b enteros coprimos, entonces a y $b - 7a$ son coprimos.
 - (b) $\sqrt[3]{2}$ es un número racional.
 - (c) Dados enteros consecutivos n y $n+1$, el producto $n(n+1)$ no puede ser un cuadrado.
 - (d) El grafo $H = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ con $\mathcal{V} = \{p, q, r, s\}$ y $\mathcal{A} = \{\{p, q\}, \{q, r\}, \{r, s\}\}$ es isomorfo a su complemento. (Un dibujo de H es así: ).