

MATEMÁTICA DISCRETA I
Examen Final - 25/7/2013

Apellido y Nombre:

Nota:

Justificar todas las respuestas.

Parte Teórica (30 pts.)

Resolver tres de los siguientes cuatro puntos:

1. Demostrar que si $a, b \in \mathbb{N}$ entonces $(a, b)[a, b] = ab$.
2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre dos conjuntos. Demostrar que f posee inversa si y solo si f es biyectiva.
3. Sean $p, n \in \mathbb{N}$ con p un número primo y $1 < n < p$. Demostrar que el número combinatorio $\binom{p}{n}$ es divisible por p .
4. Dar la definición de conjunto inductivo. El conjunto de los irracionales, es inductivo?

Parte Práctica (70 pts.)

1. (10 pts.) Ecuación lineal de congruencia.
a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación lineal de congruencias

$$24x \equiv 3 \pmod{129}.$$

-
- b) Dar todas las soluciones x de la ecuación del punto anterior tales que $-15 < x < 40$.

2. (30 pts.) Resolver 4 de los siguientes 5 ejercicios.
a) Demostrar que 9 divide a $10^n + 3 \cdot (4^{n+2}) + 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
b) Sea $\{f_n\}$ la sucesión definida por:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}.$$

Demostrar que $f_n \leq 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

-
-
- c) Demostrar que

$$\sum_{k=2}^n k!k = (n+1)! - 2$$

para todo $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

- -
 -
 - d) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ es un número natural.
e) Expresar el número $(10000011)_2$ en base 13.
3. (15 pts.) Con las 27 letras del alfabeto y los 10 dígitos del 0 al 9 queremos formar una clave secreta de longitud 5. Cuántas formas hay de formar dicha contraseña si:
a) No hay restricciones?
b) No hay dos letras juntas ?
c) No se pueden repetir letras ni números ?
d) Las letras P, A, B, L, O, no aparecen todas juntas ?