

**MATEMÁTICA DISCRETA I**  
**Examen Final - 02/07/2015**

Apellido y Nombre:

- Justifique todas sus respuestas.
- No se puede usar calculadora ni celular.
- Para aprobar debe conseguir al menos 12 puntos en la parte teórica y al menos 28 puntos en la parte práctica.

**Parte Teórica (30 pts.)**

1. (10 pts.) Sea  $p \in \mathbb{N}$  primo. Demostrar que  $\binom{p}{j} \equiv 0 \pmod{p}$ , para todo  $j$  tal que  $1 \leq j < p$ .
2. (10 pts.) Enunciar y demostrar el teorema del binomio de Newton.
3. (10 pts.) Sea  $G = (V, A)$  un grafo regular de valencia  $r$ . Demostrar que  $r|V| = 2|A|$ .

**Parte Práctica (70 pts.)**

4. a) (10 pts.) Usando el método de la demostración de la ecuación lineal en congruencia, encontrar todas las soluciones de

$$10x \equiv 12 \pmod{14}.$$

- b) (5 pts.) Dar todas las soluciones  $x$  de la ecuación del punto anterior tal que  $15 < x < 40$ .

5. Resolver los siguientes ejercicios.

- a) (9 pts.) Demostrar por inducción que la siguiente igualdad se verifica para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{j=1}^n j! j = (n+1)! - 1.$$

- b) (9 pts.) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 5, \\ a_2 = 55, \\ a_n = 11a_{n-1} - 24a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = 8^n - 3^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

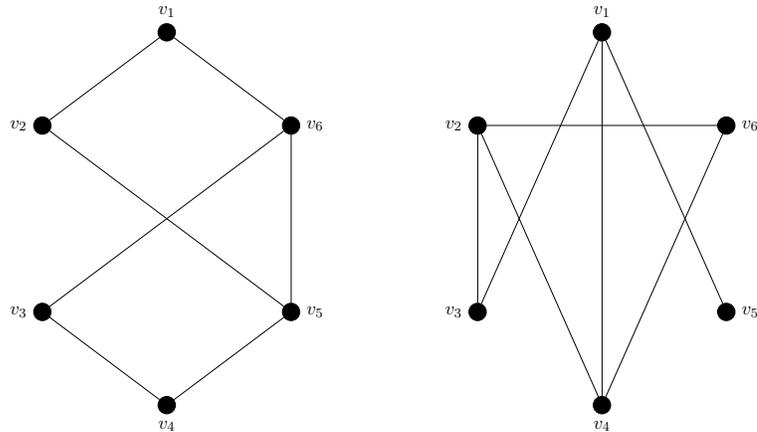
- c) (7 pts.) Expresar el número  $(2532)_6$  en base 8.

6. En una fiesta hay quince personas, nueve mujeres y seis hombres. De cuántas maneras pueden formar una fila si

- a) (3 pts.) no hay restricciones?
- b) (4 pts.) las nueve mujeres están juntas (en un bloque)?
- c) (4 pts.) no hay dos mujeres juntas?
- d) (4 pts.) entre los hombres  $A$  y  $B$  no hay otros hombres y hay exactamente tres mujeres?

7. (15 puntos) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando apropiadamente.

a) Los siguientes grafos son isomorfos:



b) El resto de la división de  $2^{245}$  por 11 es 10.

c) Existen enteros no nulos  $a, b, c$  tales que  $8a^6 = 4b^2c^4$ .

**Ejercicios para alumnos libres**

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

- Expresar el número 3417 en base 7.
- Calcular el máximo común divisor (180, 66) usando el Algoritmo de Euclides.

1	2	3	Total T

1	2	Total L

4.a	4.b	5.a	5.b	5.c	6.a	6.b	6.c	6.d

7.a	7.b	7.c	Total P

TOTAL