Matemática Discreta I

Examen Final - 6 de agosto de 2020

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
  - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
  - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *"Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018"*.
  - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
  - Subí el archivo pdf en el apartado "Tu Trabajo - Añadir o crear".
  - Una vez subido el archivo, presioná "Entregar".

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en "Comentarios privados".
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en "Comentarios privados".

Parte Teórica (30 pts.)

(1) (*10 pts.*) De la definición de número combinatorio.

(2) (*10 pts.*) Demuestre el siguiente enunciado: sean a entero con $a > 0$, entonces $\operatorname{mcd}(a, 0) = a$.

(3) (*10 pts.*) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$, probar que $a \equiv b \pmod{m}$ implica que $b \equiv a \pmod{m}$.

Parte Práctica (70 pts.)

(4) (*24 pts.*)

(a) (*7 pts.*) Hallar el resto de la división de 415^{91} por 17.

(b) (*7 pts.*) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $n^2 + 5n + 1$ y $5n^3 + n^2$ son coprimos.

(c) (*10 pts.*) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ a_n = (n-2)a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(5) (*16 pts.*) Queremos formar comités de entre un grupo de 7 argentinos y 6 uruguayos. ¿Cuántos comités distintos de 5 personas pueden formarse

(a) sin restricciones?

(b) con 1 presidente y 2 vocales?

(c) con al menos un uruguayo?

(d) con exactamente 2 argentinos y el argentino A y el uruguayo B no pueden estar ambos en el comité?

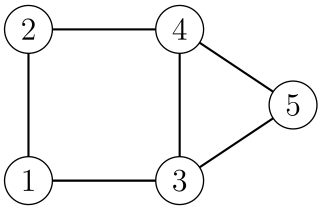
(6) (*16 pts.*) Dada la ecuación de congruencia

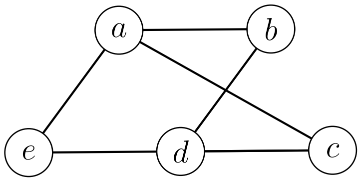
$$15\,x \equiv 10\,(85),$$

hallar todas las soluciones en el intervalo $[-10, 45]$. Hacerlo con el método usado en la teórica. No usar resultados del práctico.

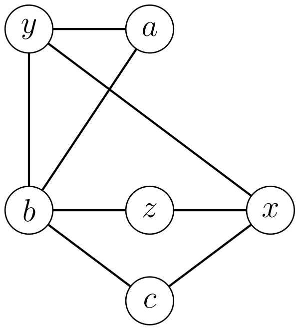
(7) (*14 pts.*)

(a) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.





(b) Encontrar una caminata euleriana en el siguiente grafo.



Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

(1) Calcular el máximo común divisor $(606, 36)$ y encontrar enteros $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que, $(606, 36) = s606 + t36$

(2) Expresar el número 24873 en base 6.