

# Matemática Discreta I

## Examen Final - 6 de agosto de 2020

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
  - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
  - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *“Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018”*.
  - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
  - Subí el archivo pdf en el apartado “Tu Trabajo - Añadir o crear”.
  - Una vez subido el archivo, presioná “Entregar”.

### Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en “Comentarios privados”.
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en “Comentarios privados”.

### Parte Teórica (30 pts.)

- (1) (10 pts.) Sea  $x$  un número y  $n \in \mathbb{N}$ . Defina recursivamente  $x^n$ .
- (2) (10 pts.) Demuestre el siguiente enunciado: sean  $a$  y  $b$  enteros,  $b$  no nulo, entonces  $\text{mcd}(a, b) = 1$  si y solo si existen  $s, t$  enteros tales que  $1 = sa + tb$ .
- (3) (10 pts.) Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ , probar que

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad b \equiv a \pmod{m}.$$

### Parte Práctica (70 pts.)

- (4) (24 pts.)
- (a) (7 pts.) Hallar el resto de la división de  $424^{97}$  por 11.
- (b) (7 pts.) Probar que si  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces los números  $n^3 + n^2 + 1$  y  $n^5 + n^3$  son coprimos.
- (c) (10 pts.) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 3a_{n-1} + (n-1)(n-3)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = n!$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- (5) (16 pts.) Queremos formar comités de entre un grupo de 8 cordobeses y 7 riojanos. ¿Cuántos comités distintos de 5 personas pueden formarse
- (a) sin restricciones?
- (b) con 1 presidente y 2 secretarios?
- (c) con al menos un cordobés?
- (d) con exactamente 2 riojanos y el cordobés A y el riojano B no pueden estar ambos en el comité?

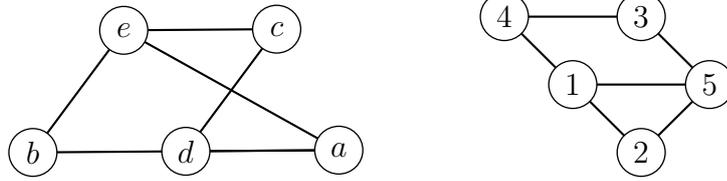
- (6) (16 pts.) Dada la ecuación de congruencia

$$9x \equiv 6 \pmod{51},$$

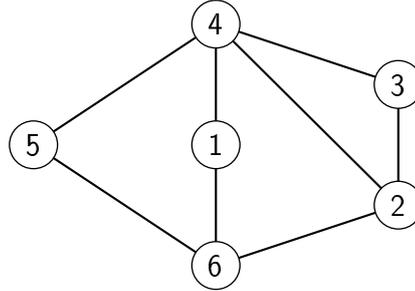
hallar todas las soluciones en el intervalo  $[-25, 15]$ . Hacerlo con el método usado en la teórica. No usar resultados del práctico.

(7) (14 pts.)

(a) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



(b) Encontrar una caminata euleriana en el siguiente grafo.



### Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

- (1) Calcular el máximo común divisor  $(606, 108)$  y encontrar enteros  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que,  $(606, 108) = s606 + t108$
- (2) Expresar el número 3789 en base 5.