

# Matemática Discreta I

## Examen Final - 20 de agosto de 2020

### Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
  - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
  - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *“Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018”*.
  - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
  - Subí el archivo pdf en el apartado “Tu Trabajo - Añadir o crear”.
  - Una vez subido el archivo, presioná “Entregar”.

### Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en “Comentarios privados”.
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en “Comentarios privados”.

### Parte Teórica (30 pts.)

1. (10 pts.) Enunciado del algoritmo de división.
2. (10 pts.) Definir  $a$  divide a  $b$  y probar que  $a|b$  y  $a|c$ , entonces  $a|b+c$ .
3. (10 pts.) Sea  $m$  un entero positivo y  $x_1, x_2, y_1, y_2$  enteros tales que  $x_1 \equiv x_2(m)$ ,  $y_1 \equiv y_2(m)$ , entonces  $x_1y_1 \equiv x_2y_2(m)$ .

### Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts.) Dada la ecuación de congruencia

$$14x \equiv 10 \pmod{26},$$

hallar todas las soluciones en el intervalo  $[-20, 10]$ . Hacerlo con el método usado en la teórica. No usar resultados del práctico.

5. (25 pts.)

a) (10 pts.) Hallar el resto de la división de  $a = 5 \cdot 7^{241} + 11 \cdot 68^{2345} - 3 \cdot 8^{109}$  por  $p = 17$ .

b) (5 pts.) Hallar el menor número natural  $n$  tal que  $6552 \cdot n$  sea un cuadrado.

c) (10 pts.) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 7, \\ a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = 6^n + (-1)^{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

6. (16 pts.) Tenemos una mini biblioteca con 16 libros distintos.

a) (4 pts.) ¿De cuántas formas pueden elegirse 3 libros?

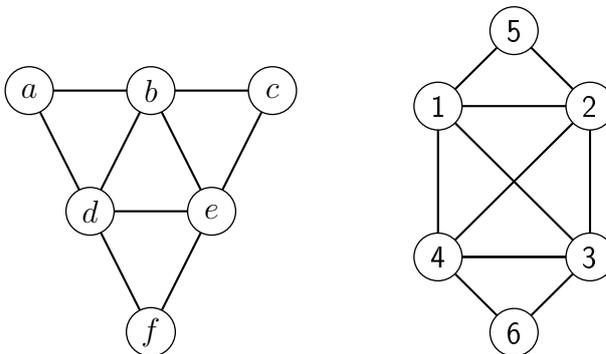
b) (4 pts.) De los libros, 7 son de matemática y 9 son de física ¿de cuántas formas puedo elegir 5 libros tal que 2 sean de matemática y 3 de física?

c) (4 pts.) Hay 5 personas y se quiere regalar 2 libros a cada una ¿cuántas posibilidades hay?

d) (4 pts.) ¿De cuántas formas pueden distribuirse los libros entre dos personas de manera tal que cada persona reciba al menos 4 libros?

7. (14 pts.)

a) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



b) En el grafo de la derecha del ítem anterior, encontrar un *circuito euleriano*, es decir una caminata euleriana que comienza y termina en un mismo vértice.

### Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

1. Calcular  $mcd(531, 120)$  y expresarlo como combinación lineal entera de 531 y 120.
2. Expresar el número  $(36041)_7$  en base 5.