

Matemática Discreta I

Examen Final - 20 de agosto de 2020

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
 - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
 - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *“Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018”*.
 - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
 - Subí el archivo pdf en el apartado “Tu Trabajo - Añadir o crear”.
 - Una vez subido el archivo, presioná “Entregar”.

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en “Comentarios privados”.
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en “Comentarios privados”.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (10 pts.) Definición de congruencia.
2. (10 pts.) Definir a divide a b y probar que $a|b$ y $a|c$, entonces $a|b.c$.
3. (10 pts.) Sean p un número primo y x, y números enteros. Probar que si $p|xy$ entonces $p|x$ o $p|y$.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts.) Dada la ecuación de congruencia

$$21x \equiv 15 \pmod{39},$$

hallar todas las soluciones en el intervalo $[-10, 30]$. Hacerlo con el método usado en la teórica. No usar resultados del práctico.

5. (25 pts.)
 - a) (10 pts.) Hallar el resto de la división de $a = 3 \cdot 5^{209} + 23 \cdot 34^{1234} - 7 \cdot 8^{110}$ por $p = 17$.
 - b) (5 pts.) Hallar el menor número natural n tal que $7425 \cdot n$ sea un cuadrado.
 - c) (10 pts.) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

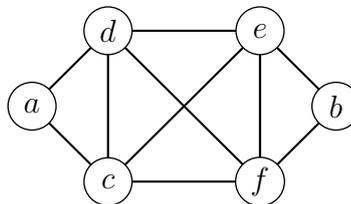
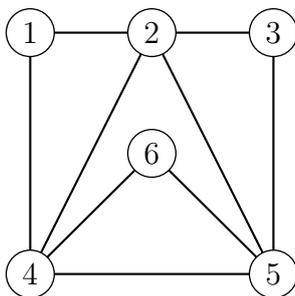
$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 5, \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 3^n + (-1)^{n+1}2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

6. (16 pts.) Tenemos un mazo de cartas con 40 cartas con cuatro palos (Oros, Copas, Espadas, Bastos), cada uno con cartas del 1 al 10.
 - a) (4 pts.) ¿De cuántas formas pueden elegirse 3 cartas?
 - b) (4 pts.) ¿De cuántas formas puedo elegir 5 cartas tal que 2 sean oros y 3 copas?
 - c) (4 pts.) Hay 5 personas y se quiere repartir 3 cartas a cada una ¿cuántas posibilidades hay?
 - d) (4 pts.) ¿De cuántas formas pueden repartirse todas las cartas entre dos personas de manera tal que cada persona reciba al menos 3 cartas?

7. (14 pts.)

a) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



b) En el grafo de la derecha del ítem anterior, encontrar un *circuito euleriano*, es decir una caminata euleriana que comienza y termina en un mismo vértice.

Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

1. Calcular el máximo común divisor $(354, 240)$ y encontrar enteros $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que, $(354, 240) = s354 + t240$
2. Expresar el número $(36047)_8$ en base 5.