

**Algunas pautas a tener en cuenta para la resolución del examen:**

- Todas las respuestas deben estar detalladamente justificadas.
- Todos los resultados teóricos que se utilicen deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse.
- No está permitido usar calculadora, ni aplicaciones del celular, ni computadora, ni apuntes de la materia, ni libros o cualquier otro tipo de material.
- Incluir todos los cálculos que haya realizado en la resolución.
- **Para aprobar se requiere como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 30 pts. en la parte práctica, en el caso de alumnos regulares. En el caso de alumnos libres, se requiere un mínimo de 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica.**
- Las respuestas deben ser perfectamente legibles. Numerar secuencialmente todas las páginas.

**Parte teórica****Ejercicio 1:** *(10 puntos)*

- a) Definir número primo.
- b) Enunciar y demostrar algún resultado visto en el teórico que involucre números primos.

**Ejercicio 2:** *(10 puntos)*

- a) Definir congruencia.
- b) Enunciar y demostrar tres propiedades de la congruencia.

**Ejercicio 3:** *(10 puntos)*

- a) Definir valencia de un vértice de un grafo.
- b) Enunciar y demostrar el teorema que relaciona las valencias de los vértices de un grafo con la cantidad de aristas.
- c) Enunciar y demostrar el teorema que determina la paridad de la cantidad de vértices impares de un grafo.

## Parte práctica

**Ejercicio 4:** (15 puntos) Usar el principio de inducción para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Ejercicio 5:** Marina se quiere pintar las uñas de las dos manos y tiene 8 esmaltes: rojo, azul, amarillo, violeta, verde, naranja, blanco y negro. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si quiere

- (4 puntos) que los dedos pulgares estén pintados de verde?
- (4 puntos) usar al menos un color primario?
- (4 puntos) usar al menos un color primario y uno secundario?

**Nota:** Recordar que los colores primarios son rojo, azul y amarillo; y los secundarios, violeta, verde y naranja.

**Ejercicio 6:** (15 puntos) Sea  $a \in \mathbb{Z}$ . Determinar los posibles valores de  $(a^2 + 10a + 27, a + 5)$ . Para cada uno de ellos, exhibir un ejemplo.

**Ejercicio 7:** (13 puntos) Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Probar que 77 divide a  $(a^{60} - b^{30})ab$ .

**Ejercicio 8:** (15 puntos) Elegir **exactamente tres** de las siguientes afirmaciones y decidir si son verdaderas o falsas. Justificar.

- Existen  $m, n, q \in \mathbb{N}$  tales que  $m^9 n^3 = 33q^6$ .
- Existe una única solución entera negativa  $x$  en el intervalo  $(-210, 123]$  de la ecuación

$$21x \equiv 63(333)$$

- El siguiente sistema de ecuaciones tiene una solución única en el intervalo  $(-5, 5000]$

$$\begin{cases} 2x \equiv 4(5) \\ x \equiv 2(7) \\ 7x \equiv 2(13) \\ x \equiv 4(77) \end{cases}$$

- Si un número natural  $n$  es tal que el número complejo  $z = 5 + 5i$  satisface  $(5 + 5i)^n \in \mathbb{R}$ , entonces  $n$  es múltiplo de 4.
- Existe un único grafo conexo, salvo isomorfismos, cuyos vértices tienen valencias 1, 2, 2, 3, 3, 3.