Matemática Discreta I

Examen Final 8/7/21

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras estés haciendo el examen.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
  - En cada hoja que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
  - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda "Fin de la resolución" y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda "No resuelto". Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
  - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *"Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018"*.
  - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
  - Subí el archivo pdf en el apartado "Tu Trabajo - Añadir o crear".
  - Una vez subido el archivo, presioná "Entregar".

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en "Comentarios privados".
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en "Comentarios privados".

Ejercicios

Parte Teórica (30 pts.)

(1) (*10 pts.*) Enunciar el axioma de buena ordenación.

(2) (*10 pts.*) Demostrar que $\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} = 2^m$.

(3) (*10 pts.*) Probar que si p y q son primos y $p|q$ entonces $p = q$.

Parte Práctica (70 pts.)

(4) (*24 pts.*)

(a) (*10 pts.*) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 12, \\ a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 3 \cdot 2^n + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) (*7 pts.*) Probar que para todo n entero impar, se cumple que $2n^2 + 3n + 4$ es coprimo con n^5.

(c) (*7 pts.*) Hallar el resto de la división de $a = 322^{68} \cdot 65^{211}$ por $p = 11$.

(5) (*16 pts.*) Para los exámenes finales de Matemática Discreta I se requiere elegir una mesa evaluadora de 6 docentes entre un grupo de 9 docentes, de los cuales 4 son hombres y 5 mujeres. ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:

(a) (*4 pts.*) no hay restricciones?

(b) (*4 pts.*) se eligen tres mujeres y tres hombres?

Si ahora en la mesa evaluadora las personas deben cumplir roles distintos, es decir, se requiere elegir: Presidente, 1° Vocal, 2° Vocal, 1° Suplente, 2° Suplente, y 3° Suplente; ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:

(c) (*4 pts.*) se eligen los cuatro hombres?

(d) (*4 pts.*) los hombres A y E no pueden estar juntos en la misma elección?

(6) (*16 pts.*)

(a) (*10 pts.*) Usando el método de la demostración de la ecuación lineal en congruencia, encontrar todas las soluciones enteras de

$$10\,x \equiv 2\,(47).$$

(b) (*6 pts.*) Hallar las soluciones enteras x tales que $-100 \leq x \leq 100$.

(7) (*14 pts.*) Sea G el grafo con vértices

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y aristas

$$E = \{\{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{0, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$

(a) (*7 pts.*) Escribir la lista de adyacencia de G y hacer una representación gráfica del grafo.

(b) (*7 pts.*) Decir por qué existe un circuito euleriano (es decir una caminata euleriana que comienza y termina en un mismo vértice) en G, y encontrar un circuito euleriano.

Ejercicios para alumnos libres
(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

(1) Calcular el máximo común divisor $(889, 252)$ y encontrar enteros $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que,

$$(889, 252) = r\,889 + s\,252.$$

(2) Expresar el número $(1021101)_3$ en base 7.