Matemática Discreta I

Examen Final 13/08/21

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras estés haciendo el examen.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
  - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
  - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda "Fin de la resolución" y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda "No resuelto". Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
  - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *"Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018"*.
  - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
  - Subí el archivo pdf en el apartado "Tu Trabajo - Añadir o crear".
  - Una vez subido el archivo, presioná "Entregar".

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en "Comentarios privados".
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en "Comentarios privados".

Ejercicios

Parte Teórica (30 pts.)

(1) (*8 pts.*) Sea x número. Dar la definición recursiva de x^n para $n \in \mathbb{N}$.

(2) (*12 pts.*) Enunciar y demostrar las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva de la congruencia.

(3) (*10 pts.*) Probar que si p es un número primo, a es entero y p no divide a, entonces $\operatorname{mcd}(a, p) = 1$.

Parte Práctica (70 pts.)

(4) (*26 pts.*)

(a) (*6 pts.*) Probar que no existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $9n^2 = 12m^2$.

(b) (*8 pts.*) Hallar el resto de la división de $43 \cdot 2^{163} - 11 \cdot 5^{251} + 61^{999}$ por 31.

(c) (*12 pts.*) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = 4, \\ a_3 = 14, \\ a_n = 10a_{n-1} - 31a_{n-2} + 30a_{n-3}, \text{ para } n \geq 4. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 2^{n+1} - 3^n + 5^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(5) (*16 pts.*) Sea el alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ formado por los 10 dígitos del sistema decimal. Una *palabra en el alfabeto* Σ es una secuencia de letras (en este caso de dígitos) del alfabeto. Sea α una palabra, la *longitud* de α es la cantidad de dígitos que tiene la cadena α.

(a) (*4 pts.*) Sea n un número natural. ¿Cuántas palabras de longitud n hay?

(b) (*4 pts.*) Determinar el número de palabras en el alfabeto Σ de longitud 8 tal que dos dígitos consecutivos no son iguales.

(c) (*4 pts.*) Encontrar la cantidad de permutaciones de la palabra

$$595370989393.$$

(d) (*4 pts.*) Se considera el código, sobre el alfabeto $\Sigma' = \{0, 1\}$, formado por las palabras de 20 letras en las que el número de unos es múltiplo de 5. ¿Cuántas palabras distintas puede haber?

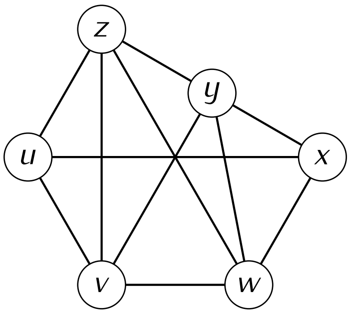
(6) (*14 pts.*) Dada la ecuación de congruencia

$$29\,x \equiv 5\,(52),$$

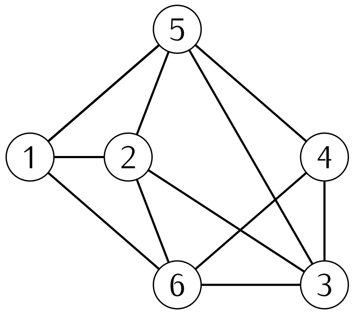
hallar todas las soluciones en el intervalo $[-60, 100)$. Hacerlo con el método usado en la teórica.

(7) (*14 pts.*)

(a) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos. Ayuda: puede usar los grafos complemento.

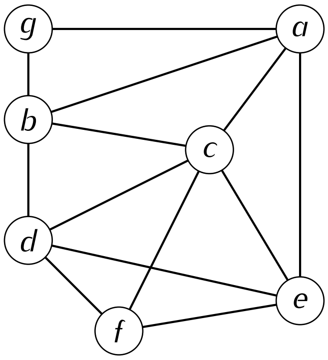


G_1



G_2

(b) En el grafo siguiente, primero probar que existen caminatas eulerianas, y luego dar una de ellas.



Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

(1) Calcular el máximo común divisor $(588, 105)$ y encontrar enteros $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que,

$$(588, 105) = r \cdot 588 + s \cdot 105.$$

(2) Sumar $(1101201)_3$ y $(2341)_5$ y expresar el resultado en base 8.