

Matemática Discreta I

Examen Final 02/12/21

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras estés haciendo el examen.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- **Para aprobar deberás tener al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.**
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
 - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
 - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda “Fin de la resolución” y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto, debe estar el enunciado seguido de la leyenda “No resuelto”. Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
 - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *“Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018”*.
 - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
 - Subí el archivo pdf en el apartado “Tu Trabajo - Añadir o crear”.
 - Una vez subido el archivo, presioná “Entregar”.

Preguntas

- Las preguntas sobre los enunciados podés hacerlas en “**Comentarios privados**”.
- Preguntas relacionadas con el desarrollo de algún ejercicio podés hacerlas en “**Comentarios privados**”.

Parte Teórica (30 pts.)

- (1) (8 pts.) Enunciar el Teorema Fundamental de la Aritmética.
- (2) (8 pts.) Sea $m \in \mathbb{N}$ y $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tales que $x \equiv y \pmod{m}$, $w \equiv z \pmod{m}$. Demostrar que $xw \equiv yz \pmod{m}$.
- (3) (8 pts.) Dar la definición de máximo común múltiplo de dos números naturales.
- (4) (6 pts.) Sea $G = (V, A)$ un grafo. Dar la definición de caminata Euleriana en G .

Parte Práctica (70 pts.)

- (5) (a) (10 pts.) Encontrar **todas** las soluciones enteras de la ecuación:

$$195x \equiv 2 \pmod{77}.$$

Encontrar aquellas soluciones $x \in \mathbb{Z}$ que satisfagan que $-30 \leq x < 125$.

- (b) (6 pts.) Demostrar que la ecuación $52x^2 \equiv 24 \pmod{17}$ no tiene soluciones enteras.
- (6) (a) (8 pts.) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad:

$$\sum_{k=1}^n kk! = (n+1)! - 1.$$

- (b) (12 pts.) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ a_n = (n-2)a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que $a_n \geq 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- (7) (20 pts.) Se quiere formar una contraseña con las 26 letras del alfabeto y los números del 0 al 9 de tal forma que **no se repita** ninguna letra ni ningún número. ¿De cuántas formas se puede hacer una contraseña de 6 dígitos si:
 - (a) no hay ninguna restricción?
 - (b) la contraseña debe contener exactamente 3 números pares? (es decir, debe contener exactamente 3 de los números 0,2,4,6 y 8).
 - (c) la contraseña **no** tiene dos letras una al lado de la otra?
 - (d) la contraseña no puede tener la letra A y al número 9 al mismo tiempo?

(8) (14 pts.) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Justifique las respuestas.

- (a) (3 pts.) Existe un grafo cuyas valencias son 2,3,5,10,8,8,9,7,3 y que tiene al menos una caminata Euleriana.
- (b) (4 pts.) Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $30 \mid (a^5 - a)$.
- (c) (4 pts.) Si n es un número natural par, entonces $(2n^2 + 5n + 3, n^3) = 1$.
- (d) (3 pts.) El resto de dividir $34^{99} - 2 \cdot 9^{121}$ por 11 es 5.