

Matemática Discreta I

Examen Final 08/02/2022

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- **No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras estés haciendo el examen.**
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- **Para aprobar deberás tener al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.**
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
 - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
 - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda “Fin de la resolución” y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto, debe estar el enunciado seguido de la leyenda “No resuelto”. Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
 - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *“Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018”*.
 - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
 - Subí el archivo pdf en el apartado “Tu Trabajo - Añadir o crear”.
 - Una vez subido el archivo, presioná “Entregar”.

Preguntas

- Las preguntas sobre los enunciados podés hacerlas en “**Comentarios privados**”.
- Preguntas relacionadas con el desarrollo de algún ejercicio podés hacerlas en “**Comentarios privados**”.

Ejercicios

Parte Teórica (30 pts.)

- (1) (8 pts.) Sea $G = (V, A)$ un grafo y $v \in V$ un vértice. Dar la definición de valencia de v .
- (2) (8 pts.) Sean $x, y, z, w, n \in \mathbb{N}$ tales que $x \equiv y \pmod{n}$, $z \equiv w \pmod{n}$. Demostrar que $xz \equiv yw \pmod{n}$.
- (3) (6 pts.) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, dar la definición de cociente y resto en la división de a por b .
- (4) (8 pts.) Enunciar el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Parte Práctica (70 pts.)

- (5) (a) (10 pts.) Encontrar **todas** las soluciones enteras de la ecuación:

$$68x \equiv 4 \pmod{88}.$$

Encontrar aquellas soluciones $x \in \mathbb{Z}$ que satisfagan que $-9 < x \leq 54$.

- (b) (6 pts.) Demostrar que la ecuación $55x^2 \equiv 48 \pmod{13}$ tiene una única solución entera en el intervalo $(35, 48)$.
- (6) (a) (10 pts.) Demostrar que para todo número natural $n \geq 3$ se verifica la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^n 2^{i-1} \geq 2n.$$

- (b) (10 pts.) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 2, \\ a_n = -a_{n-1} + (n^2 - 1)a_{n-2}, & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- (7) (20 pts.) Hay un grupo de 16 personas, 8 hombres y 8 mujeres, de las cuáles se quiere tomar una foto al grupo entero uno al lado del otro en hilera. ¿De cuántas formas se puede tomar dicha foto si
- (a) no hay ninguna restricción?
- (b) se quiere que todos los hombres esten juntos?
- (c) las mujeres y los hombres tienen que estar intercalados? (es decir no hay dos hombres juntos, ni dos mujeres juntas)
- (d) en vez de sacarle la foto a las 16 personas, solo se quiere sacarle la foto a 7 personas?

(8) (14 pts.) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Justifique las respuestas.

(a) (3 pts.) Existe un grafo cuyas valencias son 1, 1, 3, 3, 4, 4.

(b) (4 pts.) Para todo $n \in \mathbb{N}$, el número $n^3 - 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 3.

(c) (4 pts.) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $(n^5 + 2n^4 + n^3, 2n + 1) = 1$.

(d) (3 pts.) Existe al menos un árbol con 7 vértices y 8 aristas.