1	2	3	4	5	6	7	Total	Nota

Matemática Discreta I
Examen Final 7/7/22

Nombre y apellido:

DNI: Condición (R regular, L libre):

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- **No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular** mientras estés haciendo el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido. También se recomienda enumerar cada hoja.

Ejercicios

Parte Teórica (30 pts.)

(1) (*10 pts.*) Sean $x, y \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si p es un número primo tal que $p \mid x \cdot y$, entonces $p \mid x$ o $p \mid y$.

(2) (*10 pts.*) Dar la definición de congruencia, y probar que si r es el resto de dividir $a \in \mathbb{Z}$ por $m \in \mathbb{N}$, entonces $a \equiv r \pmod{m}$.

(3) (*10 pts.*) Definir árbol, y enunciar la propiedad que caracteriza a las aristas de un árbol.

Parte Práctica (70 pts.)

(4) (a) (*10 pts.*) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 12, \\ a_1 = 6, \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} + 3n - 13, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = (n-3)(n-4)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) (*4 pts.*) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple la igualdad:

$$\frac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{n! + (n+1)!} = n + 2.$$

(5) (*16 pts.*) Un docente de FaMAF tiene en su biblioteca personal un total de 14 libros originales, de los cuales 8 son de matemática y 6 de computación. Recientemente decide donar parte de ellos.

(a) (*4 pts.*) ¿De cuántas formas puede elegir 5 libros?

(b) (*4 pts.*) ¿De cuántas formas puede elegir 7 libros tal que al menos 4 sean de computación?

(c) (*4 pts.*) Hay 3 escuelitas y quiere donar 4 libros a cada una, ¿cuántas posibilidades hay?

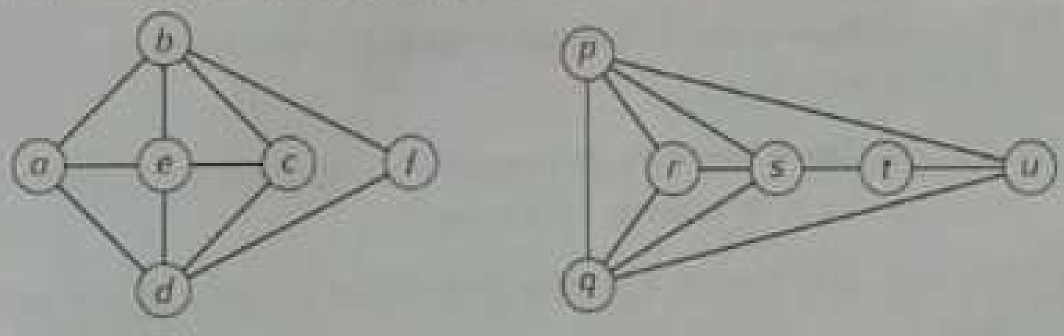
(d) (*4 pts.*) ¿De cuántas formas puede regalar todos los libros entre sus dos alumnos preferidos de manera tal que cada uno reciba al menos 3 libros?

(6) (a) (*5 pts.*) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $(n^2 + n - 1, n^3 + 2n^2 + n - 1) = 1$.

(b) (*5 pts.*) Demostrar que todo primo $p > 3$ satisface que $p \equiv 1 \pmod 6$ o $p \equiv 5 \pmod 6$.

(c) (*16 pts.*) Dada la ecuación lineal en congruencia $17x \equiv 3 \pmod{29}$, encontrar todas las soluciones enteras posibles, y dar explícitamente aquellas que pertenezcan al intervalo $[-60, 10]$. La resolución de la ecuación debe hacerse utilizando el algoritmo de Euclides.

(7) (a) (*6 pts.*) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



(b) (*8 pts.*) Determinar si el grafo $G = (V, E)$ tiene caminatas eulerianas, y en caso de ser así, encontrar una. Hacer lo mismo para los ciclos hamiltonianos.

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E = \{\{1,2\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,7\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{6,7\}\}$

Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

(1) Calcular el mínimo común multiplo $[1479, 5100]$

(2) Expresar el número $(1010201)_3$ en base 2