

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- **No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular** mientras estés haciendo el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido. También se recomienda enumerar cada hoja.

Ejercicios

Parte Teórica (30 pts.)

- (1) (10 pts.) Sean a, b enteros, b no nulo y r es el resto de dividir a por b . Entonces $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$.
- (2) (10 pts.) Sea m un entero positivo Si a, b, a', b' son enteros tales que $a \equiv a' \pmod{m}$, $b \equiv b' \pmod{m}$. Entonces $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{m}$.
- (3) (10 pts.) Demostrar que la suma de las valencias de un grafo es dos veces el número de aristas.

Parte Práctica (70 pts.)

- (4) (a) (10 pts.) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 9, \\ a_1 = 17, \\ a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = \frac{7 \cdot 2^{n+2} - 5^n}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

- (b) (4 pts.) Probar que para todo n se cumple la igualdad

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

(5) Al finalizar el cuatrimestre, un estudiante decide guardar sus 10 libros en un estante de la repisa, donde 4 son de matemática, 3 de computación, 2 física y uno de inglés.

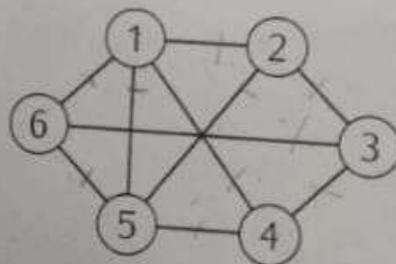
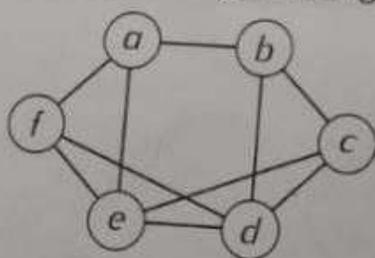
- 2 (a) (4 pts.) ¿Cuántas formas distintas tiene para ordenarlos?
- 0 (b) (4 pts.) ¿Cuántas formas distintas tiene para ordenarlos de manera que los libros de cada materia queden juntos?
- 2 (c) (4 pts.) ¿De cuántas maneras distintas puede regalar 5 libros tal que 3 sean para un compañero de curso y 2 para un estudiante ingresante?
- 0 (d) (4 pts.) ¿De cuántas maneras distintas puede regalarle los 5 libros al estudiante ingresante de forma tal que por lo menos dos de los libros sean de matemática?

(6) (a) (6 pts.) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$, el número entero $n^3 + 11n$ es divisible por 6.

– (b) (6 pts.) Demostrar que $\sqrt[3]{25/9}$ no es un número racional.

11 (c) (12 pts.) Dada la ecuación lineal en congruencia $69x \equiv 4 \pmod{74}$, encontrar todas las soluciones enteras posibles, y dar explícitamente aquellas que pertenezcan al intervalo $(0, 150)$. La resolución de la ecuación debe hacerse utilizando el algoritmo de Euclides.

(7) (a) (8 pts.) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



(b) Considere el grafo $G = (V, E)$, donde los vértices son los números enteros del 0 al 10 y:

$$E = \{\{0, 1\}, \{0, 10\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{8, 10\}, \{9, 10\}\}.$$

- (i) (3 pts.) Escribir la lista de adyacencia del grafo.
- (ii) (5 pts.) Determinar si el grafo G tiene caminatas eulerianas, y en caso de ser así, encontrar una.

Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

- (1) Calcular el mínimo común múltiplo $[2958, 5100]$
- (2) Expresar el número...