Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- **No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular** mientras estés haciendo el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total, al menos 10 pts. en la parte teórica y al menos 35 pts. en la parte práctica.
- En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido. También se recomienda enumerar cada hoja.

Ejercicios

Parte Teórica (30 pts.)

(1) (*10 pts.*) Sean $x, y \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si p es un número primo tal que $p \mid x \cdot y$, entonces $p \mid x$ o $p \mid y$.

(2) (*10 pts.*) Sea m un entero positivo y x_1, x_2, y_1, y_2 enteros tales que $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$, $y_1 \equiv y_2 \pmod{m}$. Probar que $x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{m}$.

(3) (*10 pts.*) Definir árbol, y enunciar la propiedad que caracteriza a las aristas de un árbol.

Parte Práctica (70 pts.)

(4) (a) (*10 pts.*) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = (-2)^n + 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) (*4 pts.*) Probar que se cumple la igualdad:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{s} = \frac{n!}{(n-k)!(k-s)!s!} \quad (0 \leq s \leq k \leq n).$$

(5) (*16 pts.*) Un banco tiene que elegir un equipo directivo de 5 personas entre un grupo de 8 personas, de las cuales 3 son hombres **A**, **E**, **O** y 5 mujeres **X**, **Y**, **Z**, **V**, **W** ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:

(a) (*4 pts.*) no hay restricciones?

(b) (*4 pts.*) se eligen tres mujeres y dos hombres?

Si ahora en el equipo directivo las personas deben cumplir roles distintos, es decir, se requiere elegir los 5 cargos directivos: director, subdirector, interventor, cajero y cobrador; ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:

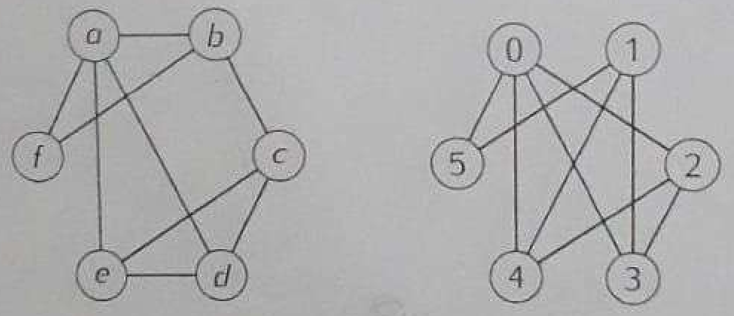
(c) (*4 pts.*) se eligen los tres hombres?

(d) (*4 pts.*) los hombres **A** y **E** no pueden estar juntos en la misma elección?

(6) (a) (*6 pts.*) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $mcd\left(n^2 - 2n + 1, n^2 - 4n + 2\right) = 1$.

15 (b) (*18 pts.*) Dada la ecuación lineal en congruencia $17\,x \equiv 5 \pmod{24}$, encontrar todas las soluciones enteras posibles, y dar explícitamente aquellas que pertenezcan al intervalo $[-60, 10)$. La resolución de la ecuación debe hacerse usando el método visto en clase.

(7) NR (a) (*8 pts.*) Decidir si los siguientes grafos son isomorfos o no. Justifique claramente.



(b) (*8 pts.*) Determinar si el grafo $G = (V, E)$ tiene caminatas eulerianas, y en caso de ser así, encontrar una.

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}, \{7, 2\}\}$

Ejercicios para alumnos libres

(Cada ejercicio mal hecho o no resuelto descuenta 10 pts.)

(1) Calcular el mínimo común múltiplo $[1479, 5100]$

(2) Expresar el número $(1040201)_5$ en base 2.