Final de Matemática Discreta 23 de Julio de 2024 FaMAF, 1º cuatrimestre 2024

Apellido:

Nombre: **DNI:**

1. (a) (5 *pts.*) Enunciar la fórmula del binomio de Newton.
   (b) (5 *pts.*) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.
2. (a) (5 *pts.*) Dados $a, b \in \mathbb{N}$ dar la definición de mínimo común multiplo.
   (b) (5 *pts.*) Si $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ son primos distintos y $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n}$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dar la fórmula del mínimo común multiplo $[a, b]$ en términos de los primos p_i.
   (c) (5 *pts.*) Enunciar el Teorema de Fermat (alguno de los dos que vimos en clase).
3. (10 *pts.*) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} (4i - 1) = n(2n + 1).$$

4. (10 *pts.*) Calcular el resto de la división de 87^{178} por 17.
5. (5 *pts.*) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ números naturales coprimos, es decir $(a, b) = 1$. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(x, ab) = (x, a)(x, b).$$

   Ayuda: Usar el TFA y la fórmula del m.c.d. en términos de productos de primos.
6. Un jugador usa las cartas de poker (son 52 cartas, 13 cartas de cada palo, y hay 4 palos, dos palos son rojos y dos negros). Cuántas formas hay de dar una mano de 7 cartas si:
   (a) (3 *pts.*) No hay ninguna restricción.
   (b) (5 *pts.*) En la mano hay más cartas rojas que negras.
   (c) (5 *pts.*) Queremos que en la mano **no** estén juntas el as de corazones y el as de trébol.
   (d) (2 *pts.*) Hay más probabilidad que te toque una mano del punto (b) o del punto (c) ?
7. (a) (2 *pts.*) Decida si la siguiente ecuación admite solución entera justificando claramente.

$$220x \equiv 8 \ (364).$$

   (b) (10 *pts.*) En caso afirmativo, encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ que satisfacen la congruencia.
   (c) (3 *pts.*) Hay una única solución x_0 tal que $0 < x_0 < 364$?
8. (*20 pts.*) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifique apropiadamente.**
   (a) La ecuación $5\,x^2 \equiv 2024 \ (25)$ tiene dos soluciones enteras.
   (b) Existen un grafo cuyas valencias son 1,1,5,5,8,1,1,1,3,3.
   (c) La cifra de las unidades de 1003^{245} es 9.
   (d) Hay infinitos números enteros (x, y) que satisfacen $x^2 = 6y^4$.

1(a)	1(b)	2(a)	2(b)	2(c)	3	4	5	6(a)	6(b)	6(c)	6(d)

7(a)	7(b)	7(c)	8(a)	8(b)	8(c)	8(d)	Total	Nota