Matemática Discreta I

Parcial 1: Abril 12, 2022
Tema 1 - Turno Mañana

Ejercicios:

(1) (a) Dada la siguiente definición recursiva:

$$\begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = -1, \\ c_n = 5c_{n-1} - 2c_{n-2}, \text{ para } n \geq 3, \end{cases}$$

calcular el valor numérico de los términos c_3, c_4, c_5 y c_6.

(b) Calcular el valor numérico de

$$\sum_{i=1}^{5} (i+1)(i-1)\,,$$

utilizando en cada paso la definición recursiva de sumatoria.

(2) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 2 \cdot 3^n - 4^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Solución

(1) (a) Por definición $c_1 = 2,\ c_2 = -1$, luego:

$$c_3 = 5c_{3-1} - 2c_{3-2} = 5c_2 - 2c_1 = 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -9.$$

Ahora, $c_2 = -1,\ c_3 = -9$, luego:

$$\begin{aligned} c_4 &= 5c_{4-1} - 2c_{4-2} = 5c_3 - 2c_2 = 5 \cdot (-9) - 2 \cdot (-1) \\ &= -45 + 2 = -43. \end{aligned}$$

Así, $c_3 = -9,\ c_4 = -43$, entonces:

$$\begin{aligned} c_5 &= 5c_{5-1} - 2c_{5-2} = 5c_4 - 2c_3 = 5 \cdot (-43) - 2 \cdot (-9) \\ &= -215 + 18 = -197. \end{aligned}$$

Por último, de $c_4 = -43,\ c_5 = -197$, se sigue:

$$\begin{aligned} c_6 &= 5c_{6-1} - 2c_{6-2} = 5c_5 - 2c_4 = 5 \cdot (-197) - 2 \cdot (-43) \\ &= -985 + 86 = -899. \end{aligned}$$

(b) Aplicaremos reiteradas veces la definición recursiva de *sumatoria*:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5}(i+1)(i-1) &= \sum_{i=1}^{4}(i+1)(i-1) + (5+1)(5-1) \\ &= \sum_{i=1}^{3}(i+1)(i-1) + (4+1)(4-1) + 6 \cdot 4 \\ &= \sum_{i=1}^{2}(i+1)(i-1) + (3+1)(3-1) + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \\ &= \sum_{i=1}^{1}(i+1)(i-1) + (2+1)(2-1) + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \\ &= (1+1)(1-1) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \\ &= 0 + 3 + 8 + 15 + 24 = 50. \end{aligned}$$

(2) Se demostrará la fórmula por **inducción completa sobre** n.

Caso(s) base. Por la definición de la sucesión tenemos que: $a_0 = 1,\ a_1 = 2$. Por otro lado, por propiedades de las potencias ($c^0 = 1, \quad c^1 = c$), se cumple que:

$$2 \cdot 3^0 - 4^0 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 = a_0.$$
$$2 \cdot 3^1 - 4^1 = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2 = a_1.$$

Es decir, el resultado vale para $n = 0$ y $n = 1$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k \geq 1$ vale

(HI) $$a_h = 2 \cdot 3^h - 4^h \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq k,$$

eso implica que

(*) $$a_{k+1} = 2 \cdot 3^{k+1} - 4^{k+1}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 7a_{k+1-1} - 12a_{k+1-2} && \text{(por def. de } a_n\text{)} \\
&= 7a_k - 12a_{k-1} \\
&= 7\left(2 \cdot 3^k - 4^k\right) - 12\left(2 \cdot 3^{k-1} - 4^{k-1}\right) && \text{(por HI)} \\
&= 14 \cdot 3^k - 7 \cdot 4^k - 8 \cdot 3 \cdot 3^{k-1} + 3 \cdot 4 \cdot 4^{k-1} && (12 = 3 \cdot 4) \\
&= 14 \cdot 3^k - 7 \cdot 4^k - 8 \cdot 3^k + 3 \cdot 4^k && \text{(def. de } x^n\text{)} \\
&= 3^k \cdot (14 - 8) + 4^k \cdot ((-7) + 3) && \text{(factor común)} \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 3^k - 4 \cdot 4^k && (6 = 2 \cdot 3) \\
&= 2 \cdot 3^{k+1} - 4^{k+1} && \text{(def. de } x^n\text{)}
\end{aligned}
$$

Esto prueba (*). Por lo tanto, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = 2 \cdot 3^n - 4^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.