Matemática Discreta I

Parcial 1: Abril 12, 2022
Tema 1 - Turno Tarde

Ejercicios:

(1) (a) Dada la siguiente definición recursiva:

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 1, \\ c_n = 7c_{n-1} - 5c_{n-2}, \text{ para } n \geq 3, \end{cases}$$

calcular el valor numérico de los términos c_3, c_4, c_5 y c_6.

(b) Calcular el valor numérico de

$$\sum_{i=1}^{5} i^2(i-1)\,,$$

utilizando en cada paso la definición recursiva de sumatoria.

(2) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 0, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Solución

(1) (a) Por definición $c_1 = 1,\ c_2 = 1$, luego:

$$c_3 = 7c_{3-1} - 5c_{3-2} = 7c_2 - 5c_1 = 7 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 2.$$

Ahora, $c_2 = 1,\ c_3 = 2$, luego:

$$c_4 = 7c_{4-1} - 5c_{4-2} = 7c_3 - 5c_2 = 7 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 9.$$

Así, $c_3 = 2,\ c_4 = 9$, entonces:

$$\begin{aligned} c_5 &= 7c_{5-1} - 5c_{5-2} = 7c_4 - 5c_3 = 7 \cdot 9 - 5 \cdot 2 \\ &= 63 - 10 = 53. \end{aligned}$$

Por último, de $c_4 = 9,\ c_5 = 53$, se sigue:

$$\begin{aligned} c_6 &= 7c_{6-1} - 5c_{6-2} = 7c_5 - 5c_4 = 7 \cdot 53 - 5 \cdot 9 \\ &= 371 - 45 = 326. \end{aligned}$$

(b) Aplicaremos reiteradas veces la definición recursiva de *sumatoria*:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} i^2(i-1) &= \sum_{i=1}^{4} i^2(i-1) + 5^2(5-1) \\ &= \sum_{i=1}^{3} i^2(i-1) + 4^2(4-1) + 25 \cdot 4 \\ &= \sum_{i=1}^{2} i^2(i-1) + 3^2(3-1) + 16 \cdot 3 + 25 \cdot 4 \\ &= \sum_{i=1}^{1} i^2(i-1) + 2^2(2-1) + 9 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 25 \cdot 4 \\ &= 1^2(1-1) + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 25 \cdot 4 \\ &= 0 + 4 + 18 + 48 + 100 = 170. \end{aligned}$$

(2) Se demostrará la fórmula por **inducción completa sobre** n.

Caso(s) base. Por la definición de la sucesión tenemos que: $a_0 = 1,\ a_1 = 0$. Por otro lado, por propiedades de las potencias ($c^0 = 1, \quad c^1 = c$), se cumple que:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1 = a_0. \\ &3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0 = a_1. \end{aligned}$$

Es decir, el resultado vale para $n = 0$ y $n = 1$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k \geq 1$ vale

(HI) $$a_h = 3 \cdot 2^h - 2 \cdot 3^h \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq k,$$

eso implica que

(*) $$a_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 5a_{k+1-1} - 6a_{k+1-2} && \text{(por def. de } a_n\text{)}\\
&= 5a_k - 6a_{k-1} \\
&= 5\left(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k\right) - 6\left(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}\right) && \text{(por HI)}\\
&= 15 \cdot 2^k - 10 \cdot 3^k - 9 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} + 4 \cdot 3 \cdot 3^{k-1} && (6 = 2 \cdot 3)\\
&= 15 \cdot 2^k - 10 \cdot 3^k - 9 \cdot 2^k + 4 \cdot 3^k && \text{(def. de } x^n\text{)}\\
&= 2^k \cdot (15 - 9) + 3^k \cdot ((-10) + 4) && \text{(factor común)}\\
&= 3 \cdot 2 \cdot 2^k - 2 \cdot 3 \cdot 3^k && (6 = 2 \cdot 3)\\
&= 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} && \text{(def. de } x^n\text{)}
\end{aligned}$$

Esto prueba (*). Por lo tanto, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.