Matemática Discreta I

Parcial 1: Abril 12, 2022
Tema 2 - Turno Mañana

Ejercicios:

(1) (a) Dada la siguiente definición recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = -3, \\ a_2 = 2, \\ a_n = 5a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3, \end{cases}$$

calcular el valor numérico de los términos a_3, a_4, a_5 y a_6.

(b) Calcular el valor numérico de

$$\prod_{i=2}^{4} (i+1)(i-1)\,,$$

utilizando en cada paso la definición recursiva de productoria.

(2) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 6, \\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Solución

(1) (a) Por definición $a_1 = -3,\ a_2 = 2$, luego:

$$a_3 = 5a_{3-1} - 2a_{3-2} = 5a_2 - 2a_1 = 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 16.$$

Ahora, $a_2 = 2,\ a_3 = 16$, luego:

$$\begin{aligned} a_4 &= 5a_{4-1} - 2a_{4-2} = 5a_3 - 2a_2 = 5 \cdot 16 - 2 \cdot 2 \\ &= 80 - 4 = 76. \end{aligned}$$

Así, $a_3 = 16,\ a_4 = 76$, entonces:

$$\begin{aligned} a_5 &= 5a_{5-1} - 2a_{5-2} = 5a_4 - 2a_3 = 5 \cdot 76 - 2 \cdot 16 \\ &= 380 - 32 = 348. \end{aligned}$$

Por último, de $a_4 = 76,\ a_5 = 348$, se sigue:

$$\begin{aligned} a_6 &= 5a_{6-1} - 2a_{6-2} = 5a_5 - 2a_4 = 5 \cdot 348 - 2 \cdot 76 \\ &= 1740 - 152 = 1588. \end{aligned}$$

(b) Aplicaremos reiteradas veces la definición recursiva de *productoria*:

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^{4}(i+1)(i-1) &= \left(\prod_{i=2}^{3}(i+1)(i-1)\right) \cdot (4+1) \cdot (4-1) \\ &= \left(\prod_{i=2}^{2}(i+1)(i-1)\right) \cdot (3+1) \cdot (3-1) \cdot 5 \cdot 3 \\ &= (2+1) \cdot (2-1) \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= 360. \end{aligned}$$

(2) Se demostrará la fórmula por **inducción completa sobre** n.

Caso(s) base. Por la definición de la sucesión tenemos que: $a_0 = 1,\ a_1 = 6$. Por otro lado, por propiedades de las potencias ($c^0 = 1, \quad c^1 = c$), se cumple que:

$$\begin{aligned} &-2 \cdot 3^0 + 3 \cdot 4^0 = (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1 = a_0. \\ &-2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 4^1 = (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 4 = -6 + 12 = 6 = a_1. \end{aligned}$$

Es decir, el resultado vale para $n = 0$ y $n = 1$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k \geq 1$ vale

(HI) $$a_h = -2 \cdot 3^h + 3 \cdot 4^h \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq k,$$

eso implica que

(*) $$a_{k+1} = -2 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+1}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 7a_{k+1-1} - 12a_{k+1-2} && \text{(por def. de } a_n\text{)}\\
&= 7a_k - 12a_{k-1}\\
&= 7\left(-2\cdot 3^k + 3\cdot 4^k\right) - 12\left(-2\cdot 3^{k-1} + 3\cdot 4^{k-1}\right) && \text{(por HI)}\\
&= -14\cdot 3^k + 21\cdot 4^k + 8\cdot 3\cdot 3^{k-1} - 9\cdot 4\cdot 4^{k-1} && (12 = 3\cdot 4)\\
&= -14\cdot 3^k + 21\cdot 4^k + 8\cdot 3^k - 9\cdot 4^k && \text{(def. de } x^n\text{)}\\
&= 3^k\cdot(-14+8) + 4^k\cdot(21-9) && \text{(factor común)}\\
&= -2\cdot 3\cdot 3^k + 3\cdot 4\cdot 4^k && (6 = 2\cdot 3,\ 12 = 3\cdot 4)\\
&= -2\cdot 3^{k+1} + 3\cdot 4^{k+1} && \text{(def. de } x^n\text{)}
\end{aligned}
$$

Esto prueba (*). Por lo tanto, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = -2\cdot 3^n + 3\cdot 4^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.