Matemática Discreta I

Parcial 1: Abril 12, 2022
Tema 2 - Turno Tarde

Ejercicios:

(1) (a) Dada la siguiente definición recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 1, \\ a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3, \end{cases}$$

calcular el valor numérico de los términos a_3, a_4, a_5 y a_6.

(b) Calcular el valor numérico de

$$\prod_{i=2}^{5} i(i-1)\,,$$

utilizando en cada paso la definición recursiva de productoria.

(2) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 3, \\ a_1 = 5, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 4 \cdot 2^n - 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Solución

(1) (a) Por definición $a_1 = 1,\ a_2 = 1$, luego:

$$a_3 = 3a_{3-1} + 5a_{3-2} = 3a_2 + 5a_1 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8.$$

Ahora, $a_2 = 1,\ a_3 = 8$, luego:

$$a_4 = 3a_{4-1} + 5a_{4-2} = 3a_3 + 5a_2 = 3 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = 29.$$

Así, $a_3 = 8,\ a_4 = 29$, entonces:

$$a_5 = 3a_{5-1} + 5a_{5-2} = 3a_4 + 5a_3 = 3 \cdot 29 + 5 \cdot 8$$
$$= 87 + 40 = 127.$$

Por último, de $a_4 = 29,\ a_5 = 127$, se sigue:

$$a_6 = 3a_{6-1} + 5a_{6-2} = 3a_5 + 5a_4 = 3 \cdot 127 + 5 \cdot 29$$
$$= 381 + 145 = 526.$$

(b) Aplicaremos reiteradas veces la definición recursiva de *productoria*:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^{5} i(i-1) &= \left(\prod_{i=2}^{4} i(i-1)\right) \cdot 5 \cdot (5-1) \\
&= \left(\prod_{i=2}^{3} i(i-1)\right) \cdot 4 \cdot (4-1) \cdot 5 \cdot 4 \\
&= \left(\prod_{i=2}^{2} i(i-1)\right) \cdot 3 \cdot (3-1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \\
&= 2 \cdot (2-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \\
&= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5 = 2880.
\end{aligned}$$

(2) Se demostrará la fórmula por **inducción completa sobre** n.

Caso(s) base. Por la definición de la sucesión tenemos que: $a_0 = 3,\ a_1 = 5$. Por otro lado, por propiedades de las potencias ($c^0 = 1, \quad c^1 = c$), se cumple que:

$$4 \cdot 2^0 - 3^0 = 4 \cdot 1 - 1 = 4 - 1 = 3 = a_0.$$
$$4 \cdot 2^1 - 3^1 = 4 \cdot 2 - 3 = 8 - 3 = 5 = a_1.$$

Es decir, el resultado vale para $n = 0$ y $n = 1$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k \geq 1$ vale

(HI) $$a_h = 4 \cdot 2^h - 3^h \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq k,$$

eso implica que

(*) $$a_{k+1} = 4 \cdot 2^{k+1} - 3^{k+1}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 5a_{k+1-1} - 6a_{k+1-2} && \text{(por def. de } a_n\text{)}\\
&= 5a_k - 6a_{k-1}\\
&= 5\left(4 \cdot 2^k - 3^k\right) - 6\left(4 \cdot 2^{k-1} - 3^{k-1}\right) && \text{(por HI)}\\
&= 20 \cdot 2^k - 5 \cdot 3^k - 12 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 3 \cdot 3^{k-1} && (6 = 2 \cdot 3)\\
&= 20 \cdot 2^k - 5 \cdot 3^k - 12 \cdot 2^k + 2 \cdot 3^k && \text{(def. de } x^n\text{)}\\
&= 2^k \cdot (20 - 12) + 3^k \cdot ((-5) + 2) && \text{(factor común)}\\
&= 4 \cdot 2 \cdot 2^k - 3 \cdot 3^k && (8 = 2 \cdot 4)\\
&= 4 \cdot 2^{k+1} - 3^{k+1} && \text{(def. de } x^n\text{)}
\end{aligned}
$$

Esto prueba (*). Por lo tanto, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = 4 \cdot 2^n - 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.