Matemática Discreta I

Parcial 2: Abril 26, 2022
Tema 1 - Turno Mañana

Ejercicios:

(1) ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra REDUNDANTE?

(2) En la Facultad de Ciencias hay 13 profesores, 10 estudiantes avanzados, 20 estudiantes de primer año y 14 administrativos, y queremos elegir un comité de 5 personas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?

(a) Si no hay restricciones.

(b) Si debe haber 3 profesores y 2 estudiantes avanzados.

(c) Si debe haber al menos 3 profesores.

(d) Si debe haber al menos un profesor, un estudiante avanzado, un estudiante de primer año y un administrativo.

Solución

(1) La palabra REDUNDANTE es una palabra de longitud 10, donde la E, la D y la N se repiten 2 veces cada una, y luego están la R, la U, la A, y la T una sola vez cada una.

Ahora bien, si consideramos todas las letras distintas, obtenemos que hay $10!$ permutaciones de la palabra. Pero, permutando las E's, las D's y las N's sin mover las otras letras, obtenemos la misma permutación de la palabra REDUNDANTE. Por lo tanto, al número total de permutaciones lo debemos dividir por el número total de permutaciones de cada letra que se repita. Como hay $2!$ permutaciones de las E's, $2!$ permutaciones de las D's, y $2!$ permutaciones de las N's, se sigue que el número total de permutaciones de las letras de REDUNDANTE es:

$$\frac{10!}{2!2!2!}.$$

(2) (a) Como no nos imponen ninguna jerarquía en el comité ni tampoco alguna condición especial (no hay restricciones), entonces solo debemos determinar cuántos subconjuntos hay con 5 elementos (las 5 personas que debemos escoger) de un conjunto de 57 objetos (el número total de personas disponibles), es decir, debemos hacer una ***selección sin orden de 5 personas entre 57***

personas, esto es:

$$\binom{57}{5} = \frac{57!}{(57-5)!5!} = \frac{57!}{52!5!} = \frac{57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53 \cdot \cancel{52!}}{\cancel{52!}5!}$$

$$= \frac{57 \cdot \cancelto{14}{56} \cdot \cancelto{11}{55} \cdot \cancelto{9}{54} \cdot 53}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3 \cdot 2}} = 57 \cdot 53 \cdot 14 \cdot 11 \cdot 9.$$

(b) En este caso, debemos elegir 3 profesores entre 13 disponibles, y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{13}{3}$. Por otro lado, hay $\binom{10}{2}$ formas de elegir 2 estudiantes avanzados entre 10 disponibles. Luego, por el principio de multiplicación, el resultado es:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{10}{2} = \frac{13!}{\cancel{10!}3!} \cdot \frac{\cancel{10!}}{8!2!} = \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\cancel{12}}$$

$$= 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9.$$

(c) Si debe haber **al menos** 3 profesores, entonces debemos analizar **tres casos disjuntos**: (i) Si hay *exactamente* 3 profesores, o (ii) Si hay *exactamente* 4 profesores, o (iii) Si hay *exactamente* 5 profesores. En efecto,

(i) Hay $\binom{13}{3}$ formas de elegir 3 profesores entre 13. De otro lado, para completar el comité debemos elegir 2 personas entre las 44 disponibles (el número total de personas que no son profesores), y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{44}{2}$. Por el principio de multiplicación, el resultado es:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{44}{2} = \frac{13!}{10!3!} \cdot \frac{44!}{42!2!}$$

$$= \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}\cancel{6}} \cdot \frac{44 \cdot 43 \cdot \cancel{42!}}{\cancel{42!}\cancel{2}}$$

$$= 44 \cdot 43 \cdot 13 \cdot 11.$$

Análogamente,

(ii)

$$\binom{13}{4} \cdot \binom{44}{1} = 44 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5.$$

(iii)

$$\binom{13}{5} = 13 \cdot 11 \cdot 9.$$

Así, por el principio de adición, la cantidad de elecciones posibles con al menos 3 profesores es:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{44}{2} + \binom{13}{4} \cdot \binom{44}{1} + \binom{13}{5}.$$

(d) Como debe haber al menos una persona de cada rol, y hay 4 roles (profesor, estudiante avanzado, estudiante de primer año, administrativo), entonces en cada elección de 5 personas **ineludiblemente tiene que haber dos del mismo rol**.

Ahora bien, si fijamos el rol que se repite, hay 4 casos disjuntos. Esto es,

- Si hay exactamente 2 profesores, y una persona de cada otro rol:
$$\binom{13}{2} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{20}{1} \cdot \binom{14}{1} = 13 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 14.$$
- Si hay exactamente 2 estudiantes avanzados, y una persona de cada otro rol:
$$\binom{13}{1} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{1} \cdot \binom{14}{1} = 13 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 14.$$
- Si hay exactamente 2 estudiantes de primer año, y una persona de cada otro rol:
$$\binom{13}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{20}{2} \cdot \binom{14}{1} = 13 \cdot 10 \cdot 19 \cdot 10 \cdot 14.$$
- Si hay exactamente 2 administrativos, y una persona de cada otro rol:
$$\binom{13}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{20}{1} \cdot \binom{14}{2} = 13 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 13 \cdot 7.$$

De todo lo anterior, y por el principio de adición, el resultado es:
$$14 \cdot 13 \cdot 10^2 \cdot 53.$$