Matemática Discreta I

Parcial 3: Mayo 19, 2022
Tema 1 - Turno Mañana

Ejercicios:

(1) (a) Convertir a base 2 el número 245.
    (b) Calcular la resta $(3221)_4 - (2130)_4$ y expresarla en base 5.

(2) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 - 3n + 3$ no es divisible por 6.
    Ayuda: Se cumple que $\forall a \in \mathbb{Z}$, $6 \mid a$ si y sólo si $2 \mid a$ y $3 \mid a$.

(3) (a) Encontrar usando el algoritmo de Euclides $d = \mathrm{mcd}(58, 40)$.
    (b) Expresar d como combinación lineal entera entre 58 y 40.
    (c) Calcular $\mathrm{mcm}(58, 40)$.

Solución

(1) (a) Recordemos el método para convertir un número $x \in \mathbb{N}$ en base 10 a una base $b \geq 2$. La forma de hacerlo es, primero, dividir el número original x y los sucesivos cocientes por b, y paramos cuando nos de un cociente igual a cero. Luego, el desarrollo en base b de x viene dado por los restos de las divisiones sucesivas, leídos en forma ascendente.
En nuestro caso, dividiendo repetidamente por **2** obtenemos:

$$\begin{aligned}
245 &= 122 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1} \\
122 &= 61 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{0} \\
61 &= 30 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1} \\
30 &= 15 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{0} \\
15 &= 7 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1} \\
7 &= 3 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1} \\
3 &= 1 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1} \\
1 &= 0 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1} \qquad \uparrow
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $245 = (11110101)_2$.

(b) Vamos a resolver este ejercicio en tres pasos:

Primer paso: Convertimos ambos números dados en base 4 a la base 10. Luego,

$$\begin{aligned}(3221)_4 &= 3\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 + 2\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0\\ &= 3\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 1 = 3\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 + 9\\ &= 192 + 32 + 9 = 233.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2130)_4 &= 2\cdot 4^3 + 1\cdot 4^2 + 3\cdot 4^1 + 0\cdot 4^0\\ &= 2\cdot 4^3 + 4^2 + 3\cdot 4 = 128 + 16 + 12 = 156.\end{aligned}$$

Segundo paso: Hacemos aritmética en la base 10, la cual todos conocemos. Tenemos que la resta es:

$$233 - 156 = 77.$$

Tercer paso: Por último, convertimos el número (en base 10) obtenido en el paso anterior a la base pedida, 5. En efecto,

$$77 = 3\cdot 5^2 + 2 = (302)_5.$$

En resumen,

$$(3221)_4 - (2130)_4 = 233 - 156 = 77 = (302)_5.$$

(2) Tenemos que: $\forall a\in\mathbb{Z}$, $6\mid a$ si y sólo si $2\mid a$ y $3\mid a$ (esto se deduce de las propiedades de divisibilidad, y del siguiente hecho: $(b,c)=1,\ b\mid d,\ c\mid d \Rightarrow b{\cdot}c\mid d$). Usando los contrarreciprocos, obtenemos que: $\forall a\in\mathbb{Z}$,

$$6\nmid a \;\Leftrightarrow\; 2\nmid a \;\text{ o }\; 3\nmid a.$$

Así, para demostrar que $6\nmid(n^2-3n+3)$, basta ver que $2\nmid(n^2-3n+3)$, con $n\in\mathbb{Z}$, y para ello consideremos si n es par ó impar:

- Si $n=2q$, para algún $q\in\mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}n^2-3n+3 &= 4q^2-6q+3 = 4q^2-6q+2+1\\ &= 2(2q^2-3q+1)+1 = 2\widetilde{q}+1.\end{aligned}$$

donde $\widetilde{q} := 2q^2-3q+1\in\mathbb{Z}$. Por lo tanto, el resto de la división de n^2-3n+3 por 2 es 1, es decir, $2\nmid(n^2-3n+3)$.

- Si $n = 2p + 1$, para algún $p \in \mathbb{Z}$, entonces

$$
\begin{aligned}
n^2 - 3n + 3 &= (2p+1)^2 - 3(2p+1) + 3 \\
&= 4p^2 + 4p + 1 - 6p - 3 + 3 = 4p^2 - 2p + 1 \\
&= 2(2p^2 - p) + 1 = 2\widetilde{p} + 1.
\end{aligned}
$$

  donde $\widetilde{p} := 2p^2 - p \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el resto de la división de $n^2 - 3n + 3$ por 2 es 1, es decir, $2 \nmid (n^2 - 3n + 3)$.

Como en cualquier caso: $2 \nmid (n^2 - 3n + 3)$, podemos concluir que $6 \nmid (n^2 - 3n + 3)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(3) (a) Por el *Algoritmo de la División* y el *Algoritmo de Euclides*, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
58 &= 40 \cdot 1 + 18 \quad \Rightarrow \quad (58, 40) = (40, 18). \\
40 &= 18 \cdot 2 + 4 \quad \Rightarrow \quad (40, 18) = (18, 4). \\
18 &= 4 \cdot 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad (18, 4) = (4, 2). \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0 \quad \Rightarrow \quad (4, 2) = (2, 0).
\end{aligned}
$$

De donde, $d = (58, 40) = (2, 0) = 2$.

(b) De las ecuaciones que obtuvimos anteriormente, despejamos los restos, así:

$$18 = 58 - 40 = 58 + (-1) \cdot 40 \tag{1}$$

$$4 = 40 - 18 \cdot 2 = 40 + (-2) \cdot 18 \tag{2}$$

$$2 = 18 - 4 \cdot 4 = 18 + (-4) \cdot 4 \tag{3}$$

Ahora, vamos reemplazando las ecuaciones hacia atrás:

$$
\begin{aligned}
2 &= 18 + (-4) \cdot 4 && \text{(por (3))} \\
&= 18 + (-4) \cdot (40 + (-2) \cdot 18) && \text{(por (2))} \\
&= 18 + (-4) \cdot 40 + 8 \cdot 18 = 9 \cdot 18 + (-4) \cdot 40 && \text{(aritmética)} \\
&= 9 \cdot (58 + (-1) \cdot 40) + (-4) \cdot 40 && \text{(por (1))} \\
&= 9 \cdot 58 + (-9) \cdot 40 + (-4) \cdot 40 = 9 \cdot 58 + (-13) \cdot 40 && \text{(aritmética)}
\end{aligned}
$$

En resumen, $d = 2 = 9 \cdot 58 + (-13) \cdot 40$.

(c) Por teorema, obtenemos que:

$$\operatorname{mcm}(58, 40) = \frac{58 \cdot 40}{\operatorname{mcd}(58, 40)} = \frac{58 \cdot 40}{2} = 58 \cdot 20 = 1160.$$