Matemática Discreta I

Parcial 3: Mayo 19, 2022
Tema 1 - Turno Tarde

Ejercicios:

(1) (a) Convertir a base 3 el número 4595.
(b) Calcular la resta $(4322)_5 - (1142)_5$ y expresarla en base 6.

(2) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, el entero $n^2 + 5n + 7$ no es divisible por 12.
Ayuda: Se cumple que $\forall a \in \mathbb{Z}$, $12 \mid a$ si y sólo si $3 \mid a$ y $4 \mid a$.

(3) (a) Encontrar usando el algoritmo de Euclides $d = \mathrm{mcd}(75, 48)$.
(b) Expresar d como combinación lineal entera entre 75 y 48.
(c) Calcular $\mathrm{mcm}(75, 48)$.

Solución

(1) (a) En este caso, dividiendo repetidamente por **3**, el desarrollo en base 3 de 4595 estará dado por los restos de las divisiones sucesivas, leídos en forma ascendente. Esto es,

$$\begin{aligned}
4595 &= 1531 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{2} \\
1531 &= 510 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{1} \\
510 &= 170 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{0} \\
170 &= 56 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{2} \\
56 &= 18 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{2} \\
18 &= 6 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{0} \\
6 &= 2 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{0} \\
2 &= 0 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{2} \quad \uparrow
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $4595 = (20022012)_3$.

(b) La suma/resta entre números escritos en la misma base b se puede hacer de la misma forma que la suma/resta usual en base 10, **pero teniendo en cuenta las reglas de la base** b. Como en base 5, sabemos que $2 + 3 = 5 = (10)_5$, $3 + 3 = 5 + 1 = (11)_5$, etc., obtenemos:

$$\begin{array}{r} (4322)_5 \\ -(1142)_5 \\ \hline (3130)_5 \end{array}$$

Pero,

$$\begin{aligned}(3130)_5 &= 3\cdot 5^3 + 1\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 \\ &= 3\cdot 5^3 + 5^2 + 3\cdot 5 = 3\cdot 5^3 + 40 \\ &= 375 + 40 = 415.\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}415 &= 69\cdot 6 + 1 \\ 69 &= 11\cdot 6 + 3 \\ 11 &= 1\cdot 6 + 5 \\ 1 &= 0\cdot 6 + 1 \quad \uparrow\end{aligned}$$

En resumen,

$$(4322)_5 - (1142)_5 = (3130)_5 = 415 = (1531)_6.$$

(2) Tenemos que: $\forall a \in \mathbb{Z}$, $12 \mid a$ si y sólo si $3 \mid a$ y $4 \mid a$ (esto se deduce de las propiedades de divisibilidad, y del siguiente hecho: $(b, c) = 1,\ b \mid d,\ c \mid d \ \Rightarrow\ b{\cdot}c \mid d$). Usando los contrarreciprocos, obtenemos que: $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$12 \nmid a \ \Leftrightarrow\ 3 \nmid a \ \text{ o } \ 4 \nmid a.$$

Así, para demostrar que $12 \nmid (n^2 + 5n + 7)$, basta ver que $4 \nmid (n^2 + 5n + 7)$, con $n \in \mathbb{Z}$, y para ello consideremos los restos de la división de n por 4:

- Si $n = 4q$, para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}n^2 + 5n + 7 &= 16q^2 + 20q + 7 = 16q^2 + 20q + 4 + 3 \\ &= 4(4q^2 + 5q + 1) + 3 = 4\widetilde{q} + 3.\end{aligned}$$

  donde $\widetilde{q} := 4q^2 + 5q + 1 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el resto de la división de $n^2 + 5n + 7$ por 4 es 3, es decir, $4 \nmid (n^2 + 5n + 7)$.

- Si $n = 4p + 1$, para algún $p \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}n^2 + 5n + 7 &= (4p + 1)^2 + 5(4p + 1) + 7 = 16p^2 + 28p + 13 \\ &= 4(4p^2 + 7p + 3) + 1 = 4\widetilde{p} + 1.\end{aligned}$$

  donde $\widetilde{p} := 4p^2 + 7p + 3 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el resto de la división de $n^2 + 5n + 7$ por 4 es 1, es decir, $4 \nmid (n^2 + 5n + 7)$.

- Si $n = 4t + 2$, para algún $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} n^2 + 5n + 7 &= (4t+2)^2 + 5(4t+2) + 7 = 16t^2 + 36t + 21 \\ &= 4(4t^2 + 9t + 5) + 1 = 4\widetilde{t} + 1. \end{aligned}$$

  donde $\widetilde{t} := 4t^2 + 9t + 5 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el resto de la división de n^2+5n+7 por 4 es 1, es decir, $4 \nmid (n^2 + 5n + 7)$.

- Si $n = 4k + 3$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} n^2 + 5n + 7 &= (4k+3)^2 + 5(4k+3) + 7 = 16k^2 + 44k + 31 \\ &= 4(4k^2 + 11k + 7) + 3 = 4\widetilde{k} + 3. \end{aligned}$$

  donde $\widetilde{k} := 4k^2 + 11k + 7 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el resto de la división de n^2+5n+7 por 4 es 3, es decir, $4 \nmid (n^2 + 5n + 7)$.

Como en cualquier caso: $4 \nmid (n^2+5n+7)$, podemos concluir que $12 \nmid (n^2+5n+7)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(3) (a) Por el *Algoritmo de la División* y el *Algoritmo de Euclides*, obtenemos:

$$\begin{aligned} 75 &= 48 \cdot 1 + 27 && \Rightarrow && (75, 48) = (48, 27). \\ 48 &= 27 \cdot 1 + 21 && \Rightarrow && (48, 27) = (27, 21). \\ 27 &= 21 \cdot 1 + 6 && \Rightarrow && (27, 21) = (21, 6). \\ 21 &= 6 \cdot 3 + 3 && \Rightarrow && (21, 6) = (6, 3). \end{aligned}$$

De donde, $d = (75, 48) = (6, 3) = 3$, ya que $3 \mid 6$.

(b) De las ecuaciones que obtuvimos anteriormente, despejamos los restos, así:

$$27 = 75 - 48 = 75 + (-1) \cdot 48 \tag{1}$$

$$21 = 48 - 27 = 48 + (-1) \cdot 27 \tag{2}$$

$$6 = 27 - 21 = 27 + (-1) \cdot 21 \tag{3}$$

$$3 = 21 - 6 \cdot 3 = 21 + (-3) \cdot 6 \tag{4}$$

Ahora, vamos reemplazando las ecuaciones hacia atrás:

$$\begin{aligned} 3 &= 21 + (-3) \cdot 6 && \text{(por (4))} \\ &= 21 + (-3) \cdot (27 + (-1) \cdot 21) && \text{(por (3))} \\ &= 21 + (-3) \cdot 27 + 3 \cdot 21 = 4 \cdot 21 + (-3) \cdot 27 && \text{(aritmética)} \\ &= 4 \cdot (48 + (-1) \cdot 27) + (-3) \cdot 27 && \text{(por (2))} \\ &= 4 \cdot 48 + (-4) \cdot 27 + (-3) \cdot 27 = 4 \cdot 48 + (-7) \cdot 27 && \text{(aritmética)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3 &= 4 \cdot 48 + (-7) \cdot (75 + (-1) \cdot 48) && \text{(por (1))} \\
&= 4 \cdot 48 + (-7) \cdot 75 + 7 \cdot 48 = 11 \cdot 48 + (-7) \cdot 75 && \text{(aritmética)}
\end{aligned}
$$

En resumen, $d = 3 = 11 \cdot 48 + (-7) \cdot 75.$

(c) Por teorema, obtenemos que:

$$\mathrm{mcm}(75, 48) = \frac{75 \cdot 48}{\mathrm{mcd}(75, 48)} = \frac{75 \cdot 48}{3} = 25 \cdot 48 = 1200.$$