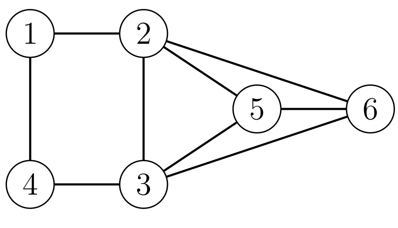
Matemática Discreta I

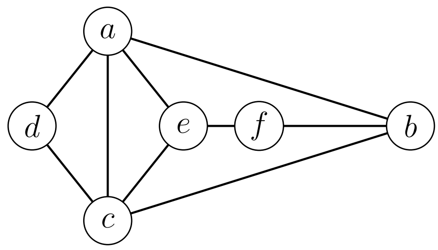
Parcial 5: Junio 21, 2022
Tema 2 - Turno Mañana

Ejercicios:

(1) Sean los siguientes grafos:



G_1



G_2

(a) Escribir la tabla de adyacencias de G_1.
(b) ¿Es G_1 un grafo regular?
(c) Dibujar los grafos complementarios de G_1 y G_2.
(d) Probar que G_1 y G_2 no son isomorfos (puede ayudar usar el item (c)).
(e) Dé un ciclo hamiltoniano en el grafo G_1.

(2) Determinar si el grafo $G = (V, E)$ tiene caminatas o circuitos eulerianos, y en caso de que la respuesta sea positiva, encontrar una caminata o circuito euleriano.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 7\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 12\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}, \{9, 11\}, \{9, 12\}, \{10, 11\}\}$$

Solución

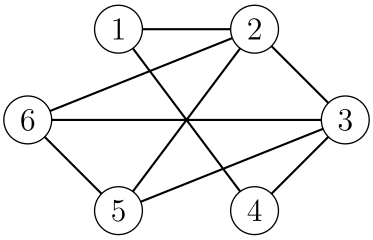
(1) (a) Por definición, tenemos que la tabla de adyacencias de G_1 esta dada por:

1	2	3	4	5	6
2	1	2	1	2	2
4	3	4	3	3	3
	5	5		6	5
	6	6			

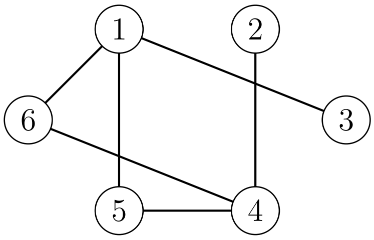
(1) (b) De donde, es claro que la lista de valencias de G_1 es: $2, 2, 3, 3, 4, 4$. Por lo tanto, G_1 no es un grafo regular, ya que tiene vértices distintos con valencias diferentes.

(1) (c) En lo que sigue vamos a determinar G_1^c y G_2^c graficamente. Para ello, dibujaremos los grafos G_1 y G_2 de tal forma que los vértices formen un hexágono (que es la forma usual de dibujar al grafo completo K_6). En efecto, por la definición de grafo complemento, obtenemos:

$\mathbf{G_1}$:

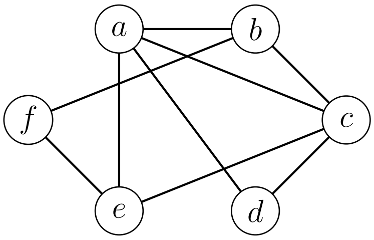


$\mathbf{G_1^c}$:

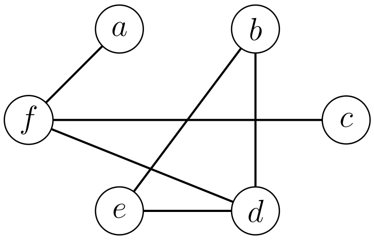


De otro lado,

$\mathbf{G_2}$:

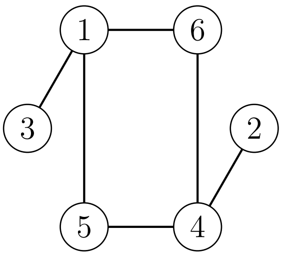


$\mathbf{G_2^c}$:

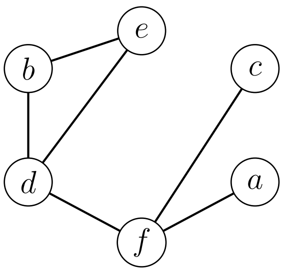


Para lo que sigue, conviene re-dibujar a los grafos G_1^c y G_2^c, reordenando sus vértices apropiadamente, esto es:

$\mathbf{G_1^c}$:



$\mathbf{G_2^c}$:

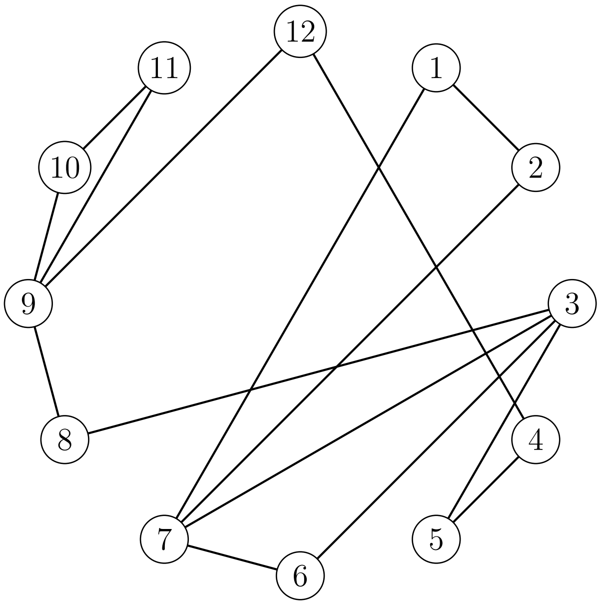


(1) (d) Si bien tanto G_1^c y G_2^c son grafos de 6 vértices, con la misma lista de valencias (y por tanto misma cantidad de aristas): $1, 1, 2, 2, 3, 3$, no son isomorfos. Una manera de probar esto es observar que los vértices $\{1, 4, 5, 6\}$ de G_1^c forman un C_4 (grafo *cíclico*), y cualquier isomorfismo debería llevar estos vértices en cuatro vértices de G_2^c con la misma propiedad, pero es claro que tal conjunto de vértices de G_2^c no existe, así no puede haber un isomorfismo entre G_1^c y G_2^c. De lo anterior, se concluye que G_1 y G_2 tampoco son isomorfos.

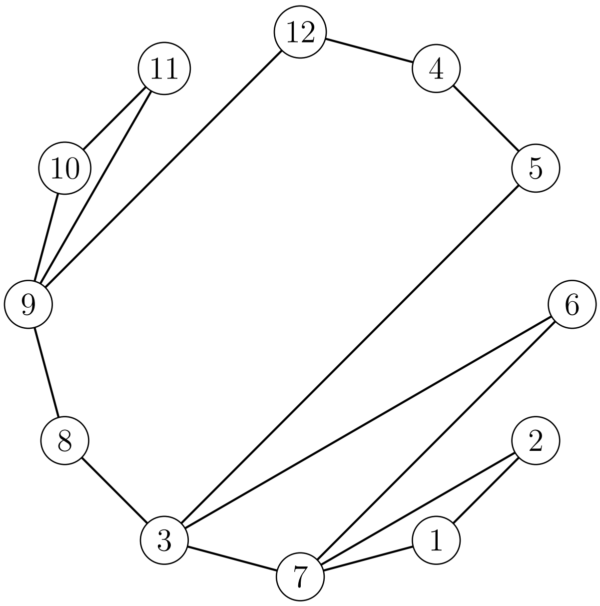
(1) (e) Los ciclos hamiltonianos se deben hacer, cuando es posible, "a ojo". Uno posible en G_1 es:

$$1, 2, 6, 5, 3, 4, 1.$$

(2) Se podría hacer haciendo la lista de adyacencia del grafo y aplicando en forma simbólica el algoritmo explicado en clase. Sin embargo, en estos casos de pocos vértices es mejor dibujar el grafo y aplicar el algoritmo en el dibujo. Dibujaremos los vértices en forma consecutiva en un círculo y luego dibujaremos las aristas. El grafo que queda no es muy armónico pero sirve para nuestros propósitos.



De nuevo, conviene re-dibujar al grafo G, reordenando sus vértices apropiadamente, esto es:



Vemos que todos los vértices tienen valencia par. Por lo tanto, por el **Teorema 5.4.7.** del Apunte, el grafo G tiene un circuito euleriano. Hagamos una caminata maximal desde 4 sin repetir aristas:

$$4, 5, 3, 7, 1, 2, 7, 6, 3, 8, 9, 10, 11, 9, 12, 4.$$

En este caso obtuvimos directamente un circuito euleriano.