Matematica Discreta II -2021-Teórico del final del 7 julio.

Para aprobar el teórico hay que obtener 40% del puntaje en cada uno de los 3 primeros ejercicios. El 4to ejercicio puede no hacerse, pero si se hace y tiene puntaje mejor que el peor de los 3 primeros ejercicios, se reemplaza la nota de ese peor ejercicio por la nota del ejercicio 4. Todos los ejercicios valen 3,333.... puntos

(1)

¿Cual es la complejidad del algoritmo de Edmonds-Karp en el caso en que la distancia inicial entre s y t (es decir, con flujo nulo) es $n - \sqrt{n}$? Demostrarla. (en el teórico definimos unas distancias d y b y probamos que nunca disminuian entre pasos sucesivos de Edmonds-Karp. Ud. puede usar este hecho sin necesidad de probarlo).

(2) 4SAT es como 3SAT pero se pide que haya exactamente 4 literales en cada disjunción. Reducir polinomialmente 4SAT a 4-COLOR en forma similar a la reducción dada en clase de 3SAT a 3COLOR, probando que, dada una expresión booleana B en CNF con 4 literales por disjunción y variables $x_i, i = 1, 2, ..., n$, entonces existe $b \in \mathbb{Z}_2^n$ tal que $B(b) = 1$ si y solo si $\chi(G) = 4$, donde G es el grafo creado a partir de B de forma similar al grafo construido en la reducción de 3SAT a 3COLOR excepto que, para que la prueba funciones en este caso hay que hacer las siguientes modificaciones:

a) En las garras, los triangulos en las bases de las garras deben ser reemplazados por K_4s y debe haber 4 extremos de las garras en vez de 3.

b) Ademas de los vértices especiales s y t que aparecian en la prueba dada en clase, hay que añadir otro vértice r unido a todos los vértices que son vecinos de s o de t. (es decir, r estará unido a s, t, a todos los v_ℓ y a todos los extremos de las garras).

(3) a) Sea C un código lineal de longitud n sobre el alfabeto $\mathbb{Z}_p$ con p primo distinto de 2, es decir, un código no binario. En este caso "lineal" es la definición original que dimos: C es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_p^n$. Probar que si H es matriz de chequeo de C, (es decir, como antes, $C = Nu(H) = \{x \in \mathbb{Z}_p^n : Hx^t = 0\}$ entonces:

$$\delta(C) = Min\{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD de } H\}$$

(LD es "linealmente dependiente") (la prueba es casi identica a la que dimos en clase para códigos binarios, sólo que ahora no es cierto que $a + a = 0$).

b) En clase probamos que en el caso de códigos lineales, la parte a) implicaba que si una matriz de chequeo no tiene la columna 0 ni columnas repetidas, entonces el código corrije al menos un error pues $\delta \geq 3$. Apoyandose en la parte a), dar un ejemplo que muestre que esto no es necesariamente cierto para códigos no binarios y escriba como sería el teorema correcto en ese caso.

(4) Sea G un grafo tal que para cada par de vertices distintos x, y de G, $|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = 2$ (es decir, el numero de vecinos comunes a x, y es dos para todo $x, y, x \neq y$).

Probar que G es regular.