Matematica Discreta II -2021-Teórico del final febrero2022

Para aprobar el teórico hay que obtener 40% del puntaje EN CADA pregunta.

(1) Probar que si, dados vértices x, z y flujo f definimos a la distancia entre x y z relativa a f como la longitud del menor f-camino aumentante entre x y z, si es que existe tal camino, o infinito si no existe o 0 si $x = z$, denotandola por $d_f(x, z)$, y definimos $b_k(x) = d_{f_k}(x, t)$, donde f_k es el k-ésimo flujo en una corrida de Edmonds-Karp, entonces $b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$. (Prestar atención a lo que se pide. En el teórico se enuncio esta propiedad junto con la misma propiedad para unas distancias $d_k(x)$ y se demostró para esas d_k, sobreentendiendo que la prueba para las b_k es similar. Probar en este ejercicio la propiedad para las d_k tiene 0 puntos).

(2) Sea G un grafo bipartito con partes X e Y tal que $d(x) = 15 \forall x \in X$ y $d(y) = U \forall y \in Y$, donde U es la cifra de las unidades de su DNI. (si la cifra de las unidades de su DNI es 0, entonces $U = 10$).

Probar que existe un matching completo de X a Y, adaptando la prueba del teorema del matrimonio de Kőnig.

(en el teorema del matrimonio se probaba que existia un matching completo de X a Y y que $|X| = |Y|$ por lo tanto ese matching era perfecto. En nuestro caso es fácil ver que con las hipotesis dadas $|X| \neq |Y|$ (no es necesario probar esto) asi que sólo hay que probar la completitud).

(3) 40SAT es como 3SAT pero se pide que haya exactamente 40 literales en cada disjunción.

Reducir polinomialmente 40SAT a 40-COLOR probando que, dada una expresión booleana B en CNF con 40 literales por disjunción y variables $x_i, i = 1, 2, ..., n$, entonces existe $b \in \mathbb{Z}_2^n$ tal que $B(b) = 1$ si y solo si $\chi(G) = 40$, donde G es el grafo creado a partir de B de la siguiente forma:

Si $B = D_1 \wedge D_2 \wedge .... \wedge D_m$, con D_j iguale a las disjunciones:
$D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j} \vee \ell_{40,j}$ donde $\ell_{k,j}$ son literales,
entonces G es:

Vértices de G:

$$\{s, t\} \cup \{v_\ell : \ell \text{ es un literal}\} \cup \{e_{k,j}, a_{k,j} : k = 1, ..., 40, j = 1, .., m\} \cup \{r_i\}_{i=1}^{38}$$

Lados de G:

la union de los siguientes conjuntos:

(a) s, t y los r_i forman un K_{40}

(b) Para cada $j = 1, 2, ..., m$, un $K_{40,j}$ que es el completo K_{40} formado por los $a_{k,j}$, $k = 1, 2, ..., 40$.

(c) $\{e_{k,j}a_{k,j} : k = 1, ..., 40, j = 1, 2, ..., m\}$

(d) $\{e_{k,j}s, e_{k,j}v_{\ell_{k,j}} : k = 1, ..., 40, j = 1, 2, ..., m\}$

(e) $\{e_{k,j}r_i : k = 1, ..., 40, j = 1, 2, ..., m, i = 1, ..., 38\}$

(f) Para cada literal ℓ, tv_ℓ es un lado asi como todos los r_iv_ℓ para cada uno de los r_i.

(la prueba es similar a la de 3COLOR es NP completo, pero se agrega unos vértices especial r_i, algunos lados y vértices mas y en vez de triangulos hay K_{40}' s).