EXAMEN FINAL

26/07/2023

Nombre y Apellido:

El código `python` utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con "►" se deberá subir a `moodle` para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características

- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse `apellido_nombre_final.py` o `apellido_nombre_final.ipynb`
- El archivo deberá contener las funciones ejercicio1(), ejercicio2(), etc., con las resoluciones correspondientes a los ejercicios considerados, y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1:

Suponer que a una región migran familias de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo con tasa $\lambda = 2$ familias por mes. Las familias tienen una cantidad de integrantes independientes unas de otras, y que toman valores 1, 2, 3 y 4 con probabilidades $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ respectivamente.

a) Determinar el valor esperado y el desvío estándar de la cantidad de familias que llegan a la región en un término de 5 meses.

b) Dado que en el último mes llegaron exactamente 3 familias, ¿cuál es la probabilidad que en total hayan llegado exactamente 10 familias en los últimos 5 meses?

c) ► Implementar en Python la simulación de este problema de manera que el programa devuelva lo pedido en (a) y (b), y que además estime el valor esperado del número de personas que migran a la región en 5 meses. Estimar estos valores con 10000 simulaciones.

Ejercicio 2:

Se desea determinar mediante Monte Carlo el valor de la integral

$$I = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1}\, dx.$$

a) Explicar cómo se obtiene mediante simulación el valor de la integral.

b) Explicar cómo se determina un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)\cdot 100\%$ para el valor de la integral.

c) ► Obtener mediante simulación en computadora un intervalo de confianza del 90% para el valor de la integral para el número de simulaciones indicado en la tabla. Completar la tabla con 6 decimales.

N^o de sim.	Integral	Intervalo
100		
1 000		
10 000		
100 000		

d) ► Dar un intervalo de confianza del 90% deteniendo la simulación cuando la amplitud del intervalo sea menor 0.01. Indicar cuál es el número de simulaciones N_s necesarias para lograr la condición pedida y el valor de la integral para N_s simulaciones.

Ejercicio 3: Una muestra aleatoria de 100 ratas es puesta en un laberinto a fin de estudiar el número de intentos hasta encontrar el camino correcto de salida. Se registra el número de intentos de cada rata y se obtienen los siguientes datos:

Número de intentos	1	2	3	4	5	6	≥ 7
Cantidad de ratas	56	27	13	3	0	1	0

Analizar si existe evidencia estadística que el número de intentos realizados por las ratas hasta lograr la salida tiene una distribución geométrica.

Responder esta pregunta por medio de las siguientes consignas.

a) Plantear la hipótesis nula y la alternativa, y estimar los parámetros necesarios.

b) Realizar el cálculo en papel del estadístico y decir cuál es su distribución de probabilidad bajo la hipótesis nula. Utilizar agrupamientos que contengan al menos 4 observaciones.

c) Dar el p-valor de la prueba y el resultado que este arroja con un nivel de confianza del 95%.

d) ► Estimar el p-valor de la prueba mediante 1000 simulaciones y dar el resultado que este arroja con un nivel de confianza del 95%.

Elegir únicamente uno de los siguientes ejercicios. En caso de resolver más de uno se considerará únicamente el Ejercicio 4.

Ejercicio 4: Dada la cadena de Markov $\{X_t, t \geq 0\}$ con conjunto de estados $S = \{0,1,2,3\}$ y matriz de transición:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dar el diagrama de transición correspondiente.

b) Calcular las probabilidades $P(X_2 = j \mid X_0 = 0)$, para $j = 0,1,2,3$.

c) Calcular el tiempo medio de alcance al estado 0 desde cada uno de los demás estados.

d) Calcular el tiempo medio de retorno al estado 0.

Ejercicio 5: Considerar la siguiente muestra

0.932 0.202 2.627 3.297 0.548 1.828 2.217 2.235 1.041 3.096

a) Describir explícitamente la función de distribución empírica F_e , para la muestra dada.

b) ► Explicar como utilizar el método "bootstrap" para estimar la probabilidad de que la media muestral diste de la media en al menos la mitad del desvío. Estimar la probabilidad con 1000 simulaciones.

c) ► Explicar cómo utilizar el método "bootstrap" para estimar el error cuadrático medio del estimador $\overline{X}_n^2$ para el parámetro μ^2. Realizar esta estimación con 1000 simulaciones.