EXAMEN FINAL

26/07/2023

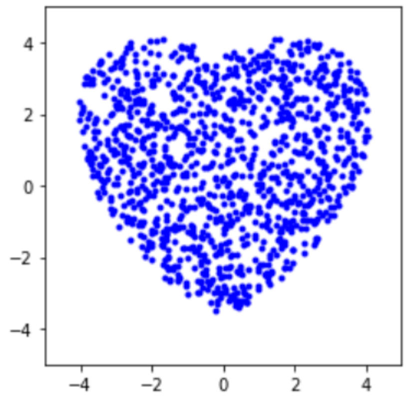
El código `python` utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con “►” se deberá subir a `moodle` para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características

- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse `apellido_nombre_final.py` o `apellido_nombre_final.ipynb`
- El archivo deberá contener las funciones ejercicio1(), ejercicio2(), etc., con las resoluciones correspondientes a los ejercicios considerados, y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1:

Se desea estimar el área de una figura. Para ello se sortean puntos aleatorios dentro de un cuadrado y se determina la proporción de puntos que verifican

$$17x^2 - 16|x|\,y + y^2 = 225.$$



a) Explicar qué estimador se utiliza para la proporción y cuál es la varianza de este estimador.

b) ► Utilizar el cuadrado con vértices en $(-5,5)$, $(5,5)$, $(5,-5)$ y $(-5,-5)$, y desarrollar un algoritmo que calcule la proporción de puntos que caen en la figura generando 10000 puntos aleatorios en el cuadrado.

c) ► Obtener mediante simulación un intervalo de ancho menor que 0,1 el cual contenga la proporción de estos puntos con el 95 % de confianza. Dada esta estimación, ¿Cuál es el área estimada para esta figura?

Ejercicio 2: Los tiempos **de arribos** de clientes a una estación están dados según los siguientes datos, expresados en minutos:

0.19	2.24	4.74	5.72	8.88	10.32	12.78	13.87	17.57	28.74	
33.22	33.59	36.66	44.70	44.90	48.72	59.58	65.16	70.67	74.83	75.56

Se desea determinar si los tiempos **entre arribos** están exponencialmente distribuidos.

a) Plantear la hipótesis nula y la alternativa, y estimar los parámetros necesarios.

b) Aplicar el test de Kolmogorov Smirnov. Escribir en papel el cálculo del estadístico. Está permitido utilizar una tabla y ayudarse con la computadora o la calculadora para realizar los cálculos necesarios.

c) Explicar cómo se determina el p-valor de la prueba utilizando simulaciones en los casos que se debe estimar un parámetro.

d) ► Estimar el p-valor de la prueba mediante 1000 simulaciones y dar el resultado que este arroja con un nivel de confianza del 95 %.

Ejercicio 3:

Considerar una variable aleatoria X con función de densidad f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2(2-x), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde C es una constante positiva.

a) Dar un método que permita generar valores de esta variable.

b) Calcular en papel el valor esperado $E[X]$.

c) ► Implementar un programa llamado VARIABLEX() que simule la variable X. Utilizar este programa para estimar $E[X]$ y $Var(X)$ con 10000 simulaciones. Utilizar las fórmulas recursivas para los estimadores de estos parámetros.

Elegir únicamente una opción del Ejercicio 4. En caso de resolver más de una se considerará únicamente la Opción 1.

Ejercicio 4:

Opción 1 Una cadena de Markov $\{X_t, t \geq 0\}$ posee tres estados $S = \{1, 2, 3\}$ y tiene las siguientes propiedades:

- Desde el estado 1 hay una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de pasar a cualquiera de los tres estados.
- Desde el estado 2 hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de pasar a cualquiera de los estados 2 o 3.
- Desde el estado 3 sólo es posible pasar al mismo estado 3.

a) Dar la matriz de transición Q y el diagrama de transición correspondiente a esta cadena.

b) Describir todos los conjuntos cerrados de esta cadena y las clases comunicantes. Indicar si se trata de una cadena irreducible.

c) Calcular el tiempo medio de alcance al estado 3 desde cada uno de los demás estados.

d) Determinar la o las distribuciones estacionarias de esta cadena. Es decir, las distribuciones de probabilidad $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ tales que $\Pi \cdot Q = \Pi$.

Opción 2 Considerar la siguiente muestra de valores:

0.932 0.202 2.627 3.297 0.548 1.828 2.217 2.235 1.041 3.096

a) Describir explícitamente la función de distribución empírica F_e , para la muestra dada.

b) ► Explicar como utilizar el método "bootstrap" para estimar la probabilidad de que la media muestral diste de la media en al menos la mitad del desvío. Estimar la probabilidad con 1000 simulaciones.

c) ► Explicar cómo utilizar el método "bootstrap" para estimar el error cuadrático medio del estimador $\overline{X}_n^2$ para el parámetro μ^2. Realizar esta estimación con 1000 simulaciones.

EJERCICIO PARA LIBRES

Ejercicio 5: Dada la integral:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x}\, dx$$

a) Indicar cómo se obtiene mediante el método de Monte Carlo una estimación del valor de la integral.

b) Estimar mediante Monte Carlo el valor de la integral con 10000 iteraciones.

c) Obtener mediante simulación en computadora el valor de la integral. Detener la simulación cuando la desviación estándar del **estimador** sea justo inferior a 0,005. Indicar cuál es el número de simulaciones N_s necesarias para lograr la condición pedida.