EXAMEN FINAL

09/08/2023

El código `python` utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con "►" se deberá subir a `moodle` para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características

- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse `apellido_nombre_final.py` o `apellido_nombre_final.ipynb`
- El archivo deberá contener las funciones ejercicio1(), ejercicio2(), etc., con las resoluciones correspondientes a los ejercicios considerados, y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1: Se arroja un par de dados 100 veces y se suman los valores de sus caras. Los valores obtenidos se registran en la siguiente tabla:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia observada	6	10	9	13	13	12	11	10	7	5	4

Se desea determinar si la distribución de la suma se corresponde con las frecuencias esperadas si ambos dados son justos.

a) Plantear la hipótesis nula y la alternativa..

b) Aplicar el test de bondad de ajuste adecuado. Explicitar las frecuencias esperadas de cada valor de la suma. Escribir en papel el cálculo del estadístico.

c) Explicar cómo puede obtenerse el p-valor de la prueba utilizando simulaciones.

d) ► Estimar el p-valor de la prueba mediante 1000 simulaciones y dar el resultado que este arroja con un nivel de confianza del 95 %.

Ejercicio 2: Un puesto de venta ambulante de panchos y hamburguesas abre a las 8:00 hs y cierra a las 17:00 hs. Los clientes llegan al puesto de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda(t)$ de manera que:

- De 8:00 a 11:00: la intensidad aumenta linealmente desde 5 hasta 20 clientes por hora.
- De 11:00 a 13:00: la intensidad es constante e igual a 20 clientes por hora.
- de 13:00 a 17:00: la intensidad decrece linealmente desde 20 a 12 clientes por hora.

a) Describir la función $\lambda(t)$ y graficarla.

b) Determinar el número esperado de arribos entre las 8:30 y las 9:30, y calcular la probabilidad de que en ese período no llegue ningún cliente.

c) Explicar cómo puede optimizarse el método de adelgazamiento subdividiendo el dominio de $\lambda(t)$ en subintervalos. Ejemplificarlo escogiendo una subdivisión de al menos 5 intervalos. Los intervalos consecutivos deben tener diferente valor máximo de $\lambda(t)$.

d) ► Implementar el algoritmo dado en d) y utilizarlo para determinar el valor esperado y la probabilidad solicitadas en b) simulando 10000 veces el proceso de llegada de clientes en una jornada.

Ejercicio 3:

Considerar una variable aleatoria X con función de densidad f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} C\, e^{-2x}\,(x-2), & x \geq 2 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde C es una constante positiva. (No será necesario determinar el valor de C).

Se desea desarrollar un algoritmo para generar valores de X utilizando el método de aceptación y rechazo.

a) Indicar cuál o cuáles de las siguientes variables aleatorias puede ser utilizada como variable de rechazo para generar valores de X, y justificar por qué:

- $Y \sim \mathcal{E}(1)$
- $Y \sim \mathcal{E}(2)$
- $Y \sim \mathcal{E}(3)$

b) Seleccionar una variable adecuada de las listadas en a) y explicar cómo se aplica el método de aceptación y rechazo para obtener un algoritmo que simule la variable aleatoria X.

c) ► Implementar el algoritmo desarrollado y utilizarlo para estimar $E[X]$ y $P(X \geq 3)$ con 10000 simulaciones. Utilizar las fórmulas recursivas para los estimadores de estos parámetros.

Ejercicio 4:

Una cadena de Markov homogénea $\{X_t, t \geq 0\}$ posee cuatro estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ y tiene la siguiente matriz de transición:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dar el diagrama de transición correspondiente a esta cadena.

b) Calcular el tiempo medio de alcance al estado 3 desde cada uno de los demás estados.

c) Determinar la o las distribuciones estacionarias de esta cadena. Es decir, las distribuciones de probabilidad $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ tales que $\Pi \cdot Q = \Pi$.

EJERCICIO PARA LIBRES

Ejercicio 5: Dada la integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(x)\, e^{-x}\, dx$$

a) Indicar cómo se obtiene mediante el método de Monte Carlo una estimación del valor de la integral.

b) Estimar mediante Monte Carlo el valor de la integral con 10000 iteraciones.

c) Obtener mediante simulación en computadora el valor de la integral. Detener la simulación cuando la desviación estándar del **estimador** sea justo inferior a 0.005. Indicar cuál es el número de simulaciones N_s necesarias para lograr la condición pedida.