

EXAMEN FINAL

28 DE FEBRERO DE 2024

El código python utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con "►" se deberá subir a moodle para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características.

- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse `apellido_nombre_final.py` o `apellido_nombre_final.ipynb`.
- El archivo deberá contener las funciones `ejercicio1()`, `ejercicio2()`, etc., con las resoluciones correspondientes a los ejercicios considerados, y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1: Considerar una variable aleatoria continua X cuya función de densidad está dada por:

$$\begin{cases} f(x) = e^{-2x}(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a) Seleccionar una variable aleatoria Y entre las tres siguientes para generar valores de la variable X por el método de aceptación y rechazo y justificar por qué es adecuada:
- $Y \sim \mathcal{E}(1)$
 - $Y \sim \mathcal{E}(2)$
 - $Y \sim \mathcal{E}(3)$

Explicar en qué consiste el método en general y en particular para este caso.

- b) ► Escribir un código en Python `variableX()` que genere valores de X usando el método descrito en (a).
- c) ► Escribir un programa `ValorEsperado(X)` que devuelva la estimación de $E[X]$ con un número de simulaciones N mayor a 100 y tal que el desvío estándar muestral del estimador sea menor a 0.001.

Ejercicio 2: Se desea determinar mediante Monte Carlo el valor de la integral

$$I = \int_3^6 \text{sen}(x + \ln(x)) dx.$$

- a) Explicar y justificar cómo se obtiene mediante simulación el valor de esta integral por el método de Monte Carlo.
- b) Explicar y justificar cómo se determina un intervalo de confianza de nivel $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ para el valor de la integral.
- c) ► Escribir un programa `MonteCarlo(N)` que devuelva un intervalo de confianza del 95% para el valor de la integral para N simulaciones y la estimación de la integral. Utilizar el programa para completar la siguiente tabla. Completar la tabla con 6 decimales.

Nº de sim.	Integral	Intervalo
1 000		
10 000		
100 000		

- d) ► Escribir un programa `Integral(L)` que devuelva un intervalo de confianza del 95% para el valor de la integral con una amplitud L , el valor de la integral y el número de simulaciones requeridas. Imprimir `Integral(0.01)`.

Ejercicio 3: En un vivero se sembraron 3 semillas de tomate en cada una de 50 macetas. La probabilidad de que una semilla germine es de 0.75. La cantidad de semillas que germinaron por maceta se resume en la siguiente tabla:

Cantidad de semillas que germinaron	0	1	2	3
Frecuencia observada	5	10	15	20

Se desea testear la hipótesis de que el número de semillas por maceta que lograron germinar sigue una distribución binomial $B(3, 0.75)$

- a) Describir en qué consiste la prueba de bondad de ajuste de chi-cuadrado y cómo se aplica en este caso. Describir el estadístico, calcular explícitamente las frecuencias esperadas y observadas, indicar cómo se define el p -valor y cómo se aplican las simulaciones para estimar este p -valor.
- b) ► Escribir un programa `testX(N)` que calcule el valor del estadístico para esta muestra y estime p -valor de la prueba con N simulaciones. El programa debe imprimir estos dos valores y además indicar con un nivel de rechazo del 1% si se rechaza o no H_0 . Ejecutar `testX(10000)`.

Ejercicio 4: Suponer que se tienen 4 sitios web donde cada sitio posee un enlace a cada uno de los otros sitios. Llamamos a estos sitios A , B , C y D . Las visitas a los diferentes sitios se comportan de acuerdo a una cadena de Markov, con las siguientes características:

- I) Desde la página A , el 30 % enlaza a la página B , el 50 % a la página C y el 20 % a la página D .
 - II) Desde la página B , el 50 % enlaza a la página A y el 50 % a la página D .
 - III) Desde la página C , el 10 % enlaza a la página B , el 70 % a la página C y el 20 % a la página D .
 - IV) Desde la página D , el 20 % enlaza a la página A , el 40 % a la página B , el 10 % a la página C y el 30 % permanece en la página.
- a) Representar la cadena en un diagrama de transición y dar la matriz de transición correspondiente.
 - b) Si X_t denota el estado de la cadena, calcular la probabilidad $P(X_2 = C \mid X_1 = C)$.
 - c) Clasificar los estados en recurrentes y transitorios. Indicar si existen estados periódicos y estados absorbentes.
 - d) Calcular los tiempos medios de alcance al estado A desde cada uno de los otros 3 estados, y los tiempos medios de retorno a cada estado de la cadena.

Ejercicio 5: Una empresa de Marketing prueba la efectividad de un nuevo saborizante para una bebida líder con una muestra de 20 personas, la mitad de las cuales prueban la bebida con el sabor anterior y la otra mitad la prueba con el nuevo sabor. Luego, a las personas en el estudio se les entrega un cuestionario que evalúa qué tan agradable fue la bebida. Los puntajes son como los de la tabla.

Sabor nuevo	20	32	2	25	5	18	21	7	28	40
Sabor viejo	13	8	6	16	12	14	10	1	4	11

Se desea determinar si existe una diferencia significativa entre la percepción de los dos sabores. Para ello:

- a) Escribir la hipótesis nula.
- b) Dar el estadístico a utilizar y calcular su valor para este caso.
- c) Calcular el p-valor exacto.
- d) Estimar el p-valor aplicando 10000 simulaciones.
- e) Indicar, con un nivel de rechazo del 10 %, si la hipótesis nula es rechazada

Ejercicio 6: Para libres.

Considera un proceso de Poisson no homogéneo que modela el número de llamadas telefónicas recibidas en un centro de atención al cliente a lo largo del día. La tasa de llegada de llamadas varía según la siguiente función:

$$\lambda(t) = 24 - 3t, \quad 0 \leq t \leq 8,$$

donde t se mide en horas.

- a) Calcular la probabilidad de recibir exactamente 6 llamadas en las últimas 2 horas.
- b) Calcular la probabilidad de recibir exactamente 6 llamadas en las últimas dos horas, dado que en la última hora hubo menos de dos llamadas.
- c) ► Escribir un programa `sistema(T)` en Python que simule las llamadas hasta el tiempo T , para un $T \leq 8$. El programa debe devolver un arreglo con los tiempos de las llamadas.
- d) ► Escribir otro programa `probs(N)` que estime las probabilidades pedidas en (a) y (b) con N simulaciones utilizando el proceso simulado en (c) y agregando los contadores que sean necesarios. El programa debe imprimir la estimación de lo requerido en (a) y en (b).