Primer Parcial de Modelos y Simulación - 28 de abril de 2005

Nombre y Apellido: Ivana Romina Altamirano

1) Se dice que una v.a. discreta X tiene distribución binomial negativa de parámetros r y p, r un número natural y $0 < p < 1$ si su función de probabilidad puntual está dada por,

$$p_j = P(X = j) = \binom{j-1}{r-1} (\qquad\qquad\qquad , \ldots$$

$\binom{j-1}{0}(1-p)^{j} p^{0}$ $\quad (1-p)^{j-1} p$

(la distribución binomial negativa generaliza la distribución geométrica, pues puede interpretarse como el número de ensayos necesarios para acumular un total de r éxitos, cuando cada ensayo tiene solamente dos resultados, éxito o fracaso y los ensayos son independientes. Cuando $r = 1$ se tiene la distribución geométrica).

R a) Si tenemos r variables aleatorias independientes Y_i con distribución geométrica de parámetro p, entonces la v.a. $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ es binomial negativa de parámetros r y p. Usando este hecho (no lo demuestre), escriba un algoritmo para simular una v.a. X con distribución binomial negativa, haciendo uso del menor número posible de números aleatorios.

M b) Verifique la relación de recurrencia $p_{j+1} = \dfrac{j(1-p)}{j+1-r} p_j$. Luego utilize tal relación para dar otro algoritmo diferente de a) que genere variables aleatorias binomiales negativas.

M c) Sea el algoritmo siguiente:

0) Input: $0 < p < 1$, N entero positivo.
1) I=1, M=0, S=0
2) Generar $U \sim U[0,1]$.
3) $M = M + 1$
4) Si $U > p$, volver a 2).
5) $S = S + M$
6) Si $I = N$, hacer $X = S$ y terminar.
7) $I = I + 1$ y ($M=0$) volver a 2)

Encuentre la distribución de la v.a. X que genera el algoritmo descripto. Justifique.

2) Una caja contiene 4 dados rojos distintos y 3 dados verdes distintos. Se elige una muestra aleatoria de 3 dados. Sea X la variable aleatoria que indica el número de dados verdes en la muestra. Luego se extrae de la caja un dado adicional de los cuatro dados que quedaron en la caja. Sea Y la v.a. que vale 1 si el dado extraído es verde y 0 en caso contrario.

M a) Calcular la función de probabilidad de Y dado $X = j$, $j = 0, 1, 2, 3$

– b) $E(X|Y = 1)$ c) $\mathrm{Var}(Y|X = 2)$. R

3) Sea $U \sim U[0,1]$.

R a) Encuentre la distribución de la v.a. discreta $Z = [nU]$, con n número natural.

– b) Utilizando el método de aceptación y rechazo, escriba el algoritmo que usaría para generar una variable aleatoria con la distribución condicional de X dado $Y = 1$ del problema 2.

4) Sean U y V v.a. independientes tales que $U \sim U[0,1]$ y $V \sim U[0,1]$. Definamos $X = -\frac{1}{\lambda}\log U$ e $Y = -\frac{1}{\mu}\log V$, con $\lambda > 0$ y $\mu > 0$.

B a) Mostrar que $X \sim E(\lambda)$ e $Y \sim E(\mu)$.

– b) Mostrar que $P(X < Y) = \lambda/(\lambda + \mu)$

– c) Escribir un algoritmo basado en el método de MonteCarlo para aproximar $P(X < Y)$.

– 5) Sea X la v.a. que toma valores en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con probabilidades respectivas

R 0.2,0.2,0.2,0.2,0.12,0.08. Utilizar el método de la composición para dar un algoritmo que genere un valor de X.