Nombre: Número de hojas adicionales: 2

delos y Simulación

Parcial 1 – Abril 10, 2008

Problema 1: Se dice que una variable aleatoria discreta X tiene distribución geométrica de parámetros p, n un número natural y $0 < p < 1$, si su función de probabilidad puntual está dada por

$$p_j = P(X = j) = p\,(1-p)^{j-1} \quad j = 1, 2, \ldots$$

a) Calcular $E[X]$.

b) Se dice que una variable aleatoria *carece de memoria* si para todo s, $t > 0$ se cumple que $P\{X > s + t \mid X > t\} = P\{X > s\}$. Pruebe que una v.a. geométrica carece de memoria.

Problema 2: Sean X e Y variables aleatorias *independientes* distribuídas *exponencialmente*

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\ , \quad (x > 0) \qquad\qquad f_Y(y) = \mu \exp(-\mu y)\ , \quad (y > 0).$$

a) Calcular $f_{X|Y}(x|y)$.

b) Calcular $P(X < y)$, donde y es un valor dado.

c) Calcular $P(X < Y) \quad (\equiv E[P(X < y)])$

Problema 3: Mediante una simulación de Monte Carlo, estimar el valor de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 \exp(-x^2)\,dx$.

Para cada caso, describir brevemente cómo se implementa el algoritmo y, luego de correrlo en computadora, completar con los valores obtenidos la siguiente tabla:

N^o de sim.	Integral (a)	Integral (b)
100		
1 000		
10 000		
100 000		
1 000 000		

Problema 4: Para $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias uniformemente distribuídas en el intervalo $(0, 1)$, se define:

$$N = \text{Mínimo}\left\{ n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \right\}$$

Es decir, N es igual a la cantidad de números aleatorios que deben sumarse para exceder a 1.

a) Explique cómo utilizar la técnica de Monte Carlo para estimar la cantidad deseada.

b) Obtener la aproximación Monte Carlo sorteando 10, 100, y 1000 números aleatorios.