PARCIAL 2

15/05/18

Nombre y Apellido: ....

1	2	3	4	Total

El código `python` utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con "►" se deberá subir a `moodle` para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características

- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse `apellido_nombre.py`
- El mismo deberá contener las funciones necesarias para ejecutar ej1(), ej2(), ej3(), ej4() con las resoluciones correspondientes a los ejercicios considerados.
- El código debe cumplir PEP8
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1. ► Suponga que tiene una urna con n bolas negras y m bolas blancas y retira r bolas sin reposición de la urna. Sea X el número de bolas negras de la muestra, la distribución de X es llamada hipergeométrica y puede verse (trabajando las extracciones como subconjuntos) que su distribución de probabilidad es

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}}{\binom{n+m}{r}} \quad k = 0, 1, ..., \text{mín}(r, n)$$

a) Verifique la siguiente fórmula para p_k en términos de p_{k-1}, para $k \neq 0$.

$$p_k = \frac{(n-(k-1)) * (r-(k-1))}{(k * (m-r+k))} p_{k-1}$$

b) Basado en esta recursión escriba un programa que compute $F(k) = P(X \leq k)$, la función de distribución hipergeométrica.

c) Use su programa para calcular $F(10)$ cuando $n = m = 30$ y $r = 15$.

d) Escriba un programa usando el método de transformada inversa para simular 10000 valores de la variable X y estime $P(X \geq 10)$ cuando $n = m = 30$, y $r = 15$. Compare con el valor exacto.

Ejercicio 2. ►

a) Implemente un algoritmo que simule un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ (t-2)^2 & 2 < t \leq T \end{cases}.$$

en un período $[0, T]$ y simule el número de eventos y los tiempos de arribo si $T = 4$.

b) Explique cómo se puede mejorar el algoritmo anterior para reducir el número de comparaciones, con $T = 4$.

Ejercicio 3. ► Una compañía de seguros tiene 1000 clientes, cada uno de los cuales puede presentar un reclamo en forma independiente en el próximo mes con probabilidad $p = 0.05$. Si se asume que los montos de los reclamos son variables aleatorias independientes con distribución exponencial con media 800, diseñe e implemente una simulación con $N = 10000$ iteraciones para estimar la probabilidad de que la suma de esos reclamos exceda los 50000 pesos.

Ejercicio 4. ► Sea X una variable aleatoria Normal $N(0, 1)$ y suponga que, para constantes $a < b$, se quiere generar una variable aleatoria Y con función de distribución

$$F(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(a)}{\Phi(b) - \Phi(a)} \qquad a \leq x \leq b$$

donde Φ es la distribución acumulada de una variable normal estándar.

a) Si X es una variable con distribución Φ, pruebe que $Y = X | a \leq X \leq b$ tiene distribución F.

b) Demuestre que el método de rechazo para la variable Y usando X como soporte se reduce en este caso a generar una variable X con distribución Φ, aceptando esta si cae entre a y b.

c) Simule la variable $Y = X | 0 \leq X \leq 1$ sabiendo que X tiene distribución N(0,1) y estime la media de la variable Y con 10000 repeticiones. Utilice para realizar la simulación de la variable Normal el método de razón entre uniformes.