PARCIAL 2

16 DE MAYO DE 2024

En todos los ejercicios se deben explicar los pasos que se siguen en la resolución.

El código python utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con " ▶" se deberá subir a moodle para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características.

- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse `apellido_nombre_parcial2.py` o `apellido_nombre_parcial2.ipynb`.
- El archivo deberá contener las funciones ejercicio1(), ejercicio2(), etc., con las resoluciones correspondientes a los ejercicios considerados, y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1: El siguiente código simula valores de una variable aleatoria X.

```
from random import random
A = [0,1,1,2,2,2,3,3,3]
B = [0,0,0,1,1,2,2,2,2,2]
def UrnaX():
U = random()
    if U < 0.9:
        return A[int(random() * 9)]
    else:
        return B[int(random() * 10)]
return A[I]
```

a) Dar la función de probabilidad de masa de la variable X.

b) Dar un algoritmo basado en el método de aceptación y rechazo para generar valores de la misma variable. ▶ Escribir el correspondiente código en Python `algo_x(p)` cuyo argumento sea el vector de probabilidades de X.

Ejercicio 2: Considerar una variable aleatoria X con función de densidad f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Explicar cómo se aplica el método de la transformada inversa para obtener un algoritmo que simula valores de X. Considerar $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Calcular explícitamente el valor de X que devuelve el algoritmo para cada uno de los siguientes valores de U:

- $U = 0.2$,
- $U = 0.5$
- $U = 0.8$.

b) ► Escribir un código en Python `ejercicio2()` que genere valores de X según a). Utilizar este código para estimar $P(X > 4)$.

Ejercicio 3: Considerar un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad dada por:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 20 & \text{si } 3 \leq t \leq 5 \\ 30 - 2t & \text{si } 5 < t \leq 9. \end{cases}$$

a) Suponer que se aplica el método de adelgazamiento para simular los tiempos de arribos utilizando un proceso de Poisson homogéneo con tasa $\lambda = 20$. ¿Con qué probabilidad se contará un evento del proceso homogéneo en $t = 4$ y con qué probabilidad en $t = 7$.

b) ► Escribir en Python un código `hot_dog(T)` aplicando el **método de adelgazamiento mejorado**. El programa debe devolver un arreglo con todos los tiempos de arribo hasta el tiempo T ($0 \leq T \leq 9$), Para esto particionar el intervalo $[0, 9]$ en subintervalos con extremos en 0, 1, 2, 6, 8 y 9. Usar este código para estimar el número esperado de arribos en el intervalo $[0, 9]$.

Ejercicio 4: Se desea estimar mediante Monte Carlo el área encerrada por la curva en el plano cuyos puntos satisfacen la ecuación:

$$x^2 + (y - |x|^{\frac{3}{2}})^2 = 1.$$

La curva queda contenida en el interior del rectángulo con vértices en $(-1.5, -1.5)$, $(-1.5, 1.5)$, $(1.5, 1.5)$, y $(1.5, -1.5)$. El gráfico se muestra en la Figura 1.

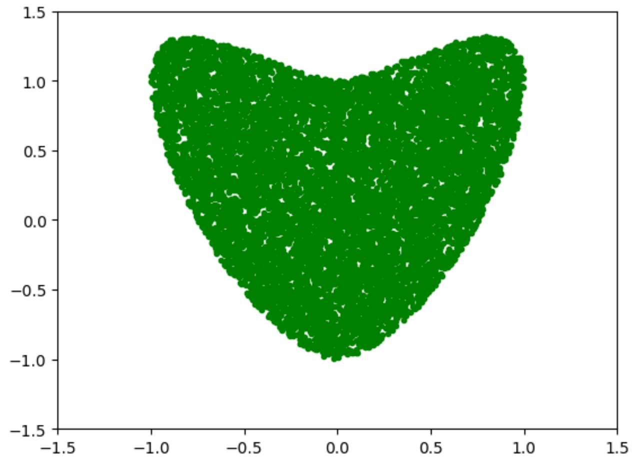

Figura 1: Área a determinar

a) Explicar y fundamentar cómo se estima mediante simulación el área encerrada por la curva por el método de Monte Carlo.

b) ► Escribir un programa `area(N)` que estime el área con N simulaciones. Dar el valor obtenido para $N = 100000$ utilizando 6 decimales.