RECUPERATORIO - PARCIAL 3 - 22/06/2023

- Enviar un único archivo con el código utilizado para la resolución de los ejercicios, que deberá llamarse de la forma `apellido_nombre_parcial3r.py` o `apellido_nombre_parcial3r.ipynb`.
- El código deberá contener las funciones ejercicio1(), ejercicio2(), etc., con las resoluciones correspondientes a los ejercicios considerados, y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1: Se tienen cuatro dados de seis caras, numeradas del 1 al 6. Se realizan 200 tiradas de los cuatro dados, y en cada tirada se registra cuántos dados resultaron en un número par. Los registros obtenidos son:

Cantidad de caras pares	0	1	2	3	4
Observaciones	10	44	67	52	27

Se desea testear la hipótesis que la cantidad de caras pares sigue una distribución binomial $Bin(4, p)$.

a) Plantear el test de hipótesis pertinente, indicar cuál es el estimador del parámetro p y realizar el cálculo en papel del estadístico.

b) Dar el p-valor de la prueba y la conclusión que este provee para un nivel de rechazo $\alpha = 0.05$:

   i) utilizando una aproximación con la distribución χ^2,

   ii) ► realizando 10000 simulaciones.

Ejercicio 2: Dado el proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad λ dada por:

$$\lambda(t) = \begin{cases} t+3 & \text{si} \quad 0 \leq t < 3 \\ 10-2t & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

a) Explicar en qué consiste el método de adelgazamiento para generar un proceso de Poisson no homogéneo y cómo lo aplicaría en este caso particular.

b) Determinar al menos 4 intervalos para la mejora del algoritmo dado en a) y la tasa elegida para cada intervalo. ► Implementar en código un programa que simule el proceso con el método de adelgazamiento mejorado y devuelva una lista de los tiempos de eventos en el intervalo $[0, 5]$.

Ejercicio 3: Considerar la cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la siguiente matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

,

a) Realizar el diagrama de transición de la cadena.

b) Calcular las probabilidades $P(X_2 = 2|X_0 = 1)$ y $P(X_2 = 2|X_0 = 2)$.

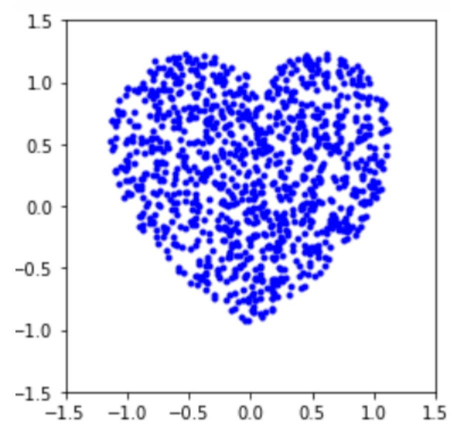
c) Decidir si la cadena es irreducible, y determinar las clases comunicantes, los estados recurrentes y los transitorios.

d) Calcular las probabilidades de alcance desde cada estado al conjunto $A = \{3, 4\}$.

Ejercicio 4:

Se desea estimar el área de una figura. Para ello se sortean puntos aleatorios dentro de un cuadrado y se determina la proporción de puntos que verifican

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 \leq x^2\, y^3.$$



a) Explicar qué estimador se utiliza para la proporción y cuál es la varianza de este estimador.

b) ► Utilizar el cuadrado con vértices en $(-1.5, 1.5)$, $(1.5, 1.5)$, $(1.5, -1.5)$ y $(-1.5, -1.5)$, y desarrollar un algoritmo que calcule la proporción de puntos que caen en la elipse con generando 10000 puntos aleatorios en el cuadrado.

c) ► Obtener mediante simulación un intervalo de ancho menor que 0.1 el cual contenga la proporción de estos puntos con el 95 % de confianza. Dada esta estimación, ¿Cuál es el área que se estima en esta figura?