Examen de Probabilidad y Estadística (03 / 12 / 2003)

FINAL

Apellido y Nombre:
Carrera:
Num. de hojas entregadas:

Parte Teórica:

Ejercicio 1: Demostrar los siguientes resultados:

a) Si A y B son eventos cualesquiera, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

b) Si A, B y C son eventos cualesquiera, entonces:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

c) Si $A \subset B$ entonces: $P(A) \leq P(B)$ y $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Ejercicio 2: a) Definir varianza de variables aleatorias discretas y de tipo continuo.

b) Probar que si c es una constante y X e Y son variables aleatorias entonces:
$Var(cX) = c^2 Var(X)$; $\quad Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ si X e Y son independientes.

Ejercicio 3: a) Dar un intervalo de confianza con nivel 95% para la media (μ), en el caso de la familia normal con varianza σ^2 conocida.

b) Idem que (a) pero con varianza σ^2 desconocida.

Parte Práctica:

Ejercicio 1: En un parque de diversiones, el número de niños que se acercan a una máquina expendedora de bebidas gaseosas durante una hora es una variable aleatoria Y discreta que puede tomar valores 0, 8, 18 y 30.

a) Si $P(Y = 8) = 1/4$, $P(Y = 18) = 1/3$ y $E(Y) = 13$, ¿cuánto vale $P(Y = 30)$? Justifique.

b) ¿Cuánto vale $P(Y = 0)$? Justifique.

c) Calcule $P(12 \leq Y \leq 20)$ y $P(Y \neq 30)$

d) Si en cada gaseosa se gana \$1.30 y el alquiler correspondiente a una hora para la máquina es de \$8, ¿cuál es el valor esperado de la ganancia neta producida por la máquina en una hora?

Ejercicio 2: El diámetro interior de ciertos anillos de pistón es una variable aleatoria X, con distribución normal de media μ y varianza $\sigma^2 = 0.04^2$.

a) Suponiendo $\mu = 12$

i) calcular $P(11.99 < X < 12.01)$

ii) Si se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$, ¿cuál es la probabilidad de que el diámetro medio muestral exceda 12.01?

Sea $x_1, x_2, ..., x_{25}$ una muestra del diámetro interior de anillos de pistones y la media muestral observada es $\bar{x} = 12.03$. Dar un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional (μ).

Ejercicio 3: Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de la función densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \theta x), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $-1 \leq \theta \leq 1$.

a) Calcular $E(X_i)$, ¿cuánto vale $E(\bar{X})$

b) Si $\hat{\theta} = 3\bar{X}$, ¿es un estimador insesgado para θ? Justifique.