Facultad de Matemática Astronomía y Física - UNC
Licenciatura en Matemática
Probabilidad y Estadística
22-12-04 - Examen Final

Apellido y Nombres
Número de hojas adicionales

Ejercicio 1 (15 puntos)

Tres jugadores A, B, C de ajedrez juegan un torneo; para que un jugador gane el torneo, debe vencer en dos partidas consecutivas. Suponga que la probabilidad de ganar una partida es la misma para cada jugador y que no se permiten tablas. Comienzan el torneo los jugadores A y B; quien gane esta primera partida sigue jugando con el jugador C; el juego continúa de esta manera, es decir, el jugador que pierde se retira, dando lugar al jugador que espera; y así sucesivamente hasta que un jugador venza en dos partidas consecutivas.

a) Pruebe que la probabilidad de que gane el jugador A es:

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+1}}\right]=\frac{5}{14}$$

b) ¿La probabilidad de ganar de A es la misma que la de B? Justifique su respuesta

c) Muestre que la probabilidad de que gane el jugador C es:

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3(k+1)}}=\frac{4}{14}$$

Ejercicio 2 (20 puntos)

Indique VERDADERO o FALSO, justificando en cada caso:

a) En una distribución binomial la media y la desviación estandar nunca pueden coincidir

b) Si X es una variable aleatoria geométrica, entonces para cualesquiera dos enteros positivos m y n se cumple que:

$$P(X>m+n \mid X>m)=P(X>n)$$

c) Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de eventos tales que $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0$ y $A_n\supseteq A_{n+1}\quad \forall n\in N$.

Entonces, $\lim_{n\to\infty}P(\bigcap_{j=1}^{n}A_j)=0$

d) Si X e Y son v.a. tales que $Cov(X,Y)=\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$, entonces existen números reales b y $a<0$ tal que $P(X=aY+b)=1$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Un sistema electrónico consta de cuatro componentes. Sea X_j el tiempo de funcionamiento de la componente j-ésima (j = 1, . . . , 4). Supongamos que las variables X_j son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución exponencial con parámetro λ. Supongamos que el sistema funciona mientras funcione la componente 1 y al menos una de las otras tres componentes. Sea T la v.a. "Tiempo de funcionamiento del sistema".

a) Demuestre la siguiente igualdad de eventos:

$$(T>t)=(X_1>t)\bigcap\left[m\acute{a}x(X_2,X_3,X_4)>t\right]$$

b) Obtenga la función de distribución acumulada de la v.a. T

Facultad de Matemática Astronomía y Física - UNC
Licenciatura en Matemática
Probabilidad y Estadística
22-12-04 - Examen Final

Apellido y Nombres
Número de hojas adicionales

Ejercicio 4 (15 puntos)

En una empresa de transportes, la probabilidad de que se accidente un camión es de 0,1. Si el accidente se produce, la probabilidad de perder la carga es 0,95. Por otra parte, la probabilidad de perder la carga sin que haya accidente es de 0,04. Calcule:

a) La probabilidad de que habiéndose perdido la carga, no haya habido accidente.
b) La probabilidad de que no habiéndose perdido la carga, haya habido accidente.
c) Si salen 5 camiones y se accidentan en forma independiente, ¿Cuál es la pérdida esperada por la empresa suponiendo que cada pérdida de carga le cuesta \$ 10000?

Ejercicio 5 (20 puntos)

Dada la función de densidad conjunta de X e Y:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6-x-y}{8} & 0<x<2, \quad 2<y<4\\ 0 & cc\end{cases}$$

a) Calcule la función de distribución acumulada de (X,Y)
b) Calcule la función de densidad de X, dado Y = 3
c) Calcule $E(X \mid Y=3)$ y $E(X)$
d) Halle $P(1<Y<3 \mid X=2)$
e) Obtenga $P(1<Y<3 \mid X>1)$
f) Sea $Z=\min(Y,3)$. Calcule la función de distribución acumulada de Z. ¿Z es continua? ¿es discreta? Justifique su respuesta.

Ejercicio 6 (15 puntos)

Un auditor toma una muestra aleatoria de tamaño 36 de una población de 1000 cuentas por cobrar. Sea X la variable aleatoria que indica el monto de la cuenta por cobrar en pesos. Se sabe que la variable aleatoria X sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma = 45$ y que

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{36} X_i}{36}$$

tiene distribución normal con media $\mu = 260$.

a) Calcule la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 250 \$.
b) Si se desea que el monto total adeudado por las 36 cuentas no sobrepase los \$ 10000 con probabilidad mayor o igual que 0,95 ¿Cuál debería ser el desvío estándar de cada cuenta si la media es $\mu = 260$?

$f_{x/}$