

**Probabilidad y Estadística**  
**Profesorados y Licenciatura en Computación**  
**Examen 18/12/2013**

1	
2	
3	
4	
5	
6	

Apellido y Nombre:

Carrera:

**Problema 1:** Las máquinas  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  fabrican en serie determinado artículo. Las producciones de  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son de 450, 450 y 600 artículos diarios y los porcentajes de defectuosos son del 2%; 3,5% y 2,5% respectivamente. De la producción total de las tres máquinas se toma una pieza al azar al final del día.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo haya sido producido por la máquina  $M_1$ ?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya sido producido por la máquina  $M_3$ ?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?
- Si se sabe que el artículo seleccionado es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina  $M_2$ ?

**Problema 2:** Una secretaria tiene dos líneas telefónicas A y B. El número de veces que recibe llamadas a las líneas A y B en una mañana son variables aleatorias independientes  $X_A$  y  $X_B$  con distribución de Poisson de parámetros  $\lambda_A = 1$  y  $\lambda_B = 2$  respectivamente.

- Dar la distribución de la variable número total de llamadas que recibe en una mañana.
- Dar el valor esperado y varianza del número total de llamadas que recibe en una mañana.
- Se observan 250 mañanas y se registra el número de mañanas que la secretaria recibe sólo una llamada. Calcular la probabilidad aproximada de que el número de mañanas que la secretaria recibe sólo una llamada sea mayor a 50, usando el teorema central del límite.

**Problema 3:** La altura ( $X$ ) de los hombres de una población tiene una distribución normal de media  $\mu_X = 170$  cm y desvío estándar  $\sigma_X = 7$  cm y la altura ( $Y$ ) de las mujeres tienen una distribución normal de media  $\mu_Y = 160$  cm y desvío estándar  $\sigma_Y = 6$  cm.

- Se elige un hombre al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que su altura esté entre 168 y 173 cm?
- ¿Para qué valor de  $c$  el intervalo  $(160 - c, 160 + c)$  incluye el 96% de las alturas de las mujeres?
- Se elige un hombre y una mujer al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que el hombre sea más alto que la mujer?
- Si se eligen 20 mujeres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio muestral de las alturas esté entre 158 y 160 cm?

**Problema 4:** Se propone un nuevo método para la determinación de concentraciones de fósforo en el suelo. Con este nuevo método se realizaron 20 mediciones de concentraciones de fósforo en un suelo cuya concentración verdadera es de 585 mg/Kg. Los datos obtenidos fueron:

579,4   570,5   583,4   598,3   586,8   582,6   593,4   584,0   594,5   605,6  
581,0   591,6   585,4   576,7   570,7   582,5   594,6   594,3   575,7   588,4

Se puede suponer que la variable concentración de fósforo tiene una distribución normal.

- Dar estimaciones por Máxima Verosimilitud para la media poblacional, varianza poblacional y percentil

3% para la variable concentración de fósforo con este nuevo método.

- b) Hallar un intervalo de confianza del 99% para la concentración media de fósforo en suelo, con el nuevo método.
- c) ¿Hay evidencia suficiente para decir que la concentración promedio de fósforo obtenida con el nuevo método difiere significativamente del valor real? Plantear las hipótesis de interés, dar la región de rechazo al 5%, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir.
- d) Acotar el p-valor de la prueba planteada en el ítem c) y concluir usando un  $\alpha = 0,01$ .

**Problema 5:** Antes de tomar la decisión de ampliar el horario de atención al público, una institución bancaria desea tener una idea de cuál sería la verdadera proporción  $p$  de clientes interesados en este cambio de horario. En una muestra aleatoria de 250 clientes, 190 estaban de acuerdo con la extensión del horario de atención.

- a) Construya un Intervalo de Confianza del 90% para la proporción poblacional  $p$  de clientes interesados en este cambio de horario.
- b) Determinar el tamaño de muestra necesario para que un Intervalo de Confianza del 90% para  $p$  tenga una longitud de a lo sumo la mitad de la obtenida en el ítem anterior, **independientemente** del valor de  $\hat{p}$ .
- c) El directorio del banco resuelve extender el horario de atención si  $p$  es superior a 0,70.
  - i) ¿Existe evidencia suficiente para que el banco decida extender el horario de atención? Plantear las hipótesis pertinentes y tomar una decisión considerando  $\alpha = 0,05$ .
  - ii) Calcular el p-valor para la prueba planteada en el ítem (i) y usando este valor tomar una decisión al 1%.

**Problema 6:** Si  $X$  tiene una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $p$ , entonces  $X/n$  es un estimador insesgado de  $p$ . Para estimar la varianza de  $X$ , utilizamos en general  $\hat{\theta} = n(X/n)(1 - X/n)$ .

- a) Probar que el estimador  $\hat{\theta}$  no es un estimador insesgado para  $V(X)$ .
- b) Modificar  $\hat{\theta}$  levemente para obtener un estimador insesgado para  $V(X)$ .