

Examen de Probabilidad y Estadística – FAMAFA (28/07/2020)

Nombre:

Carrera:

JUSTIFIQUE CLARAMENTE SU RESPUESTA

Parte A:

Ejercicio 1: i) Se determinaron 10 mediciones de concentraciones de fósforo en suelo de un campo y los datos obtenidos fueron:

779,80 499,10 510,20 508,60 303,30 501,20 495,40 507,30 599,90 600,12

a) Dar cuatro medidas de posición y tres medidas de dispersión para estos datos.

b) Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.

ii) Una pinturería vende dos marcas de pinturas látex que llamaremos A y B. Se sabe que la probabilidad que un cliente compre la pintura látex A es de 0,75. De los clientes que compran la pintura látex A, el 60% compra el rodillo. Sin embargo, sólo el 30% de los que compran la pintura látex B compran rodillos. Se selecciona al azar un comprador

a) ¿cuál es la probabilidad que adquiera un rodillo?

b) Si el cliente adquiere un rodillo, ¿cuál es la probabilidad que haya elegido una pintura látex B?

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{(x+2)^2}{8} & \text{si } x \in [-2; 0) \\ 1 - \frac{(-x+2)^2}{8} & \text{si } x \in [0; 2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determinar si X es una variable aleatoria discreta o continua. Justificar su respuesta.

b) Hallar la función probabilidad de masa o función densidad de probabilidad de X según corresponda.

c) Calcular el valor esperado y desviación estándar para X.

Ejercicio 3: Sean X e Y las determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el método estándar y con el nuevo método respectivamente. Suponga que X e Y son variables independientes con distribuciones normales con parámetros $\mu_X = 70$ y $\sigma_X = 3,5$ para el método estándar y con parámetros $\mu_Y = 75$ y $\sigma_Y = 3,5$ para el nuevo método.

a) ¿Cuál es la probabilidad que las determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el nuevo método sean por lo menos 80? Justifique su respuesta.

b) Hallar el percentil 15 o cuantil 0,15 para la variable determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el nuevo método.

c) Calcular la probabilidad que las mediciones del nuevo método sean mayores que las mediciones con el método estándar.

d) Se tomaron 20 muestras aleatorias de agua residuales en cierta región, 10 fueron usadas para cada uno de los métodos.

i) ¿cuál es la probabilidad que el promedio de mediciones con el nuevo método supere al promedio de mediciones con el método estándar?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 de las 10 determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el nuevo método supere 80? Justifique su respuesta.

Parte B:

Ejercicio 4: Los tiempos de activación de un sistema para prevención de incendios, que utiliza una espuma acuosa, para una muestra al azar de rociadores se obtuvieron para una muestra de tamaño $n = 13$, la cual arrojó un promedio muestral de 27,92 segundos y una desviación estándar muestral (s_{n-1}) de 5,62 segundos.

Se asume que la variable tiempos de activación de estos rociadores sigue una distribución normal. Según el fabricante, el tiempo medio de activación del sistema es menor a 25 segundos.

- Dar estimaciones por máxima verosimilitud para la media poblacional, para la varianza poblacional y para el percentil 30 de esta distribución.
- ¿Existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación de estos rociadores es mayor a 25 segundos? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%
- Si ahora suponemos que $\sigma = 5,1$ ¿existe evidencia suficiente para decir que el tiempo medio de activación de estos rociadores es mayor a 25 segundos? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema al 5% usando el p-valor.

Ejercicio 5: En una muestra aleatoria de 150 donantes en un banco de sangre, se encontraron que 92 eran de tipo A. ¿Sugiere esto que el porcentaje real de donantes de sangre tipo A de este banco del 40%? siendo este el porcentaje de la población del país con sangre tipo A.

- Obtener un IC del 97% para la proporción de donantes con sangre tipo A que asisten a este banco de sangre. Interprete el intervalo obtenido.
- ¿Qué tamaño de muestra se debería tomar para que la longitud del intervalo de confianza del 97% para p sea a lo sumo 0,05? Independientemente del valor de \hat{p} .
- Plantear una prueba de hipótesis para responder la pregunta inicial del enunciado aclarando las hipótesis adecuadas. Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula. Calcular el valor observado del estadístico de prueba, calcular el p-valor y concluir en el contexto del problema al 3%.

Ejercicio 6: Sean X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con función densidad de probabilidad dada por:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{para } x > 1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{para } \theta > 1.$$

- Hallar el estimador por el método de los momentos para θ .
- Hallar el estimador por el método de máxima verosimilitud para θ .