

Examen de Probabilidad y Estadística – FAMAF (11/08/2020)

Nombre:

Carrera:

JUSTIFIQUE CLARAMENTE SU RESPUESTA

Parte A:

Ejercicio 1: i) Los valores de contenido de Nitrógeno (mg/L) en muestras de aguas residuales, registrados a la salida de una planta industrial, fueron: 11,6; 19,2; 14,9; 7,3; 16,6; 9,8; 11,6; 9,7; 15,1; 14,4; 5,1; 28,8 y 15,9.

- Dar cuatro medidas de posición y tres medidas de dispersión para estos datos.
- Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.

ii) Se realizó una investigación en personas que sufren leucoplasia oral. El 85% de ellos fuman o consumen alcohol, el 55% consume alcohol (A) y el 65% fuma (F).

- ¿Cuál es la probabilidad que la persona no fume y consuma alcohol?
- ¿Son disjuntos o excluyentes los eventos F y A?
- ¿Son independientes los eventos F y A?
- Dado que se selecciona un sujeto fumador ¿cuál es la probabilidad que consuma alcohol?

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x \in [-1; 1) \\ b & \text{si } x \in [1; 6) \\ c & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

para constantes a, b y c números reales tales que $0 < a < b < c$.

- Determinar si X es una variable aleatoria discreta o continua. Justificar su respuesta.
- Hallar el valor de las constantes a, b y c tales que $E(X) = 2,1$ y $E(X^2) = 11,5$.
- Dar la función probabilidad de masa o función densidad de probabilidad de X según corresponda.
- Calcula el valor medio y varianza para $W = -5X + 10$.

Ejercicio 3: La altura de los hombres (X) de una población tiene una distribución normal con una media de 170 cm y un desvío estándar de 1,5 cm y la altura de las mujeres (Y) tiene una distribución normal con una media de 164 cm y un desvío estándar 1,5 cm.

- Si se elige un hombre al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que su altura esté comprendida entre 168 y 173 cm?
- Hallar el percentil 7% o cuantil 0,07 para la variable Y.
- Se elige un hombre y una mujer al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que el hombre sea más alto que la mujer?
- Si se eligen 9 mujeres al azar
 - ¿cuál es la probabilidad de que el promedio muestral de las alturas esté comprendida entre 162 y 165 cm?
 - ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 7 de ellas tengan una altura superior a 165 cm?

Parte B:

Ejercicio 4: El fabricante afirma que sus tabletas de aspirinas pesan 1gr. Como parte de un estudio de medicamentos se tomó una muestra de 22 tabletas de aspirinas, producidas por éste fabricante, cuyo peso promedio muestral fue de 0,95 gramos y la desviación estándar muestral (s_{n-1}) de 0,05 gramos. Suponga que la variable peso de las tabletas tiene distribución normal.

- a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para la media poblacional, para el desvío estándar poblacional y para el percentil 5 o cuantil 0,05 para la variable peso de las tabletas.
- b) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el peso medio de estas tabletas es menor a 1gr? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula, calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%
- a) Si ahora suponemos que $\sigma = 0,045$ ¿existe evidencia suficiente para decir que el peso medio de estas tabletas es menor a 1gr? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema al 5% usando el p-valor.

Ejercicio 5: De una muestra aleatoria de 200 infractores de tránsito se encontró que 70 fueron debido al uso del celular por parte del conductor sin el uso de manos libres mientras conducía.

- a) Dar un intervalo de confianza del 98% para la verdadera proporción (p) de conductores que usan el celular mientras conducen no usando manos libres.
- b) Determine el menor tamaño de muestra necesario para que la longitud de un intervalo de confianza del 98% para p no supere 0,05, independientemente del valor \hat{p} .
- c) Se desea tomar una decisión para las siguientes hipótesis:
$$H_0 : p = 0,25 \text{ vs } H_a : p > 0,25.$$
 - i) Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo H_0 .
 - ii) Dar la Región de rechazo usando $\alpha = 0,03$ y concluir en el contexto del problema.
 - iii) Calcular el p valor aproximado y usando ese valor tomar una decisión al 1%.

Ejercicio 6: Sean X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución Bernoulli de parámetro p con $0 < p < 1$.

- a) Hallar el estimador \hat{p} por el método de los momentos para p .
- b) El estimador hallado en a) ¿es insesgado para p ? Justifique su respuesta.
- c) ¿Cuál es la varianza del estimador obtenido? Justifique su respuesta.
- d) Un estimador para la varianza de la muestra es $\bar{X}(1 - \bar{X})$. Probar que el estimador no es insesgado para la varianza de la muestra y ¿se puede modificar este estimador para que resulte insesgado?