

Examen de Probabilidad y Estadística – FAMAFA (11/08/2020)

Nombre:

Carrera:

JUSTIFIQUE CLARAMENTE SU RESPUESTA

Parte A:

Ejercicio 1: i) Se determinaron 10 mediciones de concentraciones de fósforo en suelo de un campo y los datos obtenidos fueron:

779,80 499,10 510,20 508,60 303,30 501,20 495,40 507,30 599,90 600,12

a) Dar cuatro medidas de posición y tres medidas de dispersión para estos datos.

b) Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.

ii) Una pinturería vende dos marcas de pinturas látex que llamaremos A y B. Se sabe que la probabilidad que un cliente compre la pintura látex A es de 0,75. De los clientes que compran la pintura látex A, el 60% compra el rodillo. Sin embargo, sólo el 30% de los que compran la pintura látex B compran rodillos. Se selecciona al azar un comprador

a) ¿cuál es la probabilidad que adquiera un rodillo?

b) Si el cliente adquiere un rodillo, ¿cuál es la probabilidad que haya elegido una pintura látex B?

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x \in [-1; 1) \\ b & \text{si } x \in [1; 6) \\ c & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

para constantes a, b y c números reales tales que $0 < a < b < c$.

a) Determinar si X es una variable aleatoria discreta o continua. Justificar su respuesta.

b) Hallar el valor de las constantes a, b y c tales que $E(X) = 2,1$ y $E(X^2) = 11,5$.

c) Dar la función probabilidad de masa o función densidad de probabilidad de X según corresponda.

d) Calcular el valor medio y varianza para $W = -5X + 10$.

Ejercicio 3: Sean X e Y las determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el método estándar y con el nuevo método respectivamente. Suponga que X e Y son variables independientes con distribuciones normales con parámetros $\mu_X = 70$ y $\sigma_X = 3,5$ para el método estándar y con parámetros $\mu_Y = 75$ y $\sigma_Y = 3,5$ para el nuevo método.

a) ¿Cuál es la probabilidad que las determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el nuevo método sean por lo menos 80? Justifique su respuesta.

b) Hallar el percentil 15 o cuantil 0,15 para la variable determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el nuevo método.

c) Calcular la probabilidad que las mediciones del nuevo método sean mayores que las mediciones con el método estándar.

d) Se tomaron 20 muestras aleatorias de agua residuales en cierta región, 10 fueron usadas para cada uno de los métodos.

i) ¿cuál es la probabilidad que el promedio de mediciones con el nuevo método supere al promedio de mediciones con el método estándar?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 de las 10 determinaciones de oxígeno en aguas residuales con el nuevo método supere 80? Justifique su respuesta.

Parte B:

Ejercicio 4: El fabricante afirma que sus tabletas de aspirinas pesan 1gr. Como parte de un estudio de medicamentos se tomó una muestra de 22 tabletas de aspirinas, producidas por éste fabricante, cuyo peso promedio muestral fue de 0,97 gramos y la desviación estándar muestral (s_{n-1}) de 0,04 gramos. Suponga que la variable peso de las tabletas tiene distribución normal.

- a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para la media poblacional, para el desvío estándar poblacional y para el percentil 5 o cuantil 0,05 para la variable peso de las tabletas.
- b) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el peso medio de estas tabletas es menor a 1gr? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula, calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 1%
- a) Si ahora suponemos que $\sigma = 0,045$ ¿existe evidencia suficiente para decir que el peso medio de estas tabletas es menor a 1gr? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema al 1% usando el p-valor.

Ejercicio 5: En una muestra aleatoria de 180 donantes en un banco de sangre, se encontraron que 94 eran de tipo A. ¿Sugiere esto que el porcentaje real de donantes de sangre tipo A de este banco supera el 40%? siendo este el porcentaje de la población del país con sangre tipo A.

- a) Obtener un IC del 98% para la proporción de donantes con sangre tipo A que asisten a este banco de sangre. Interprete el intervalo obtenido.
- b) ¿Qué tamaño de muestra se debería tomar para que la longitud del intervalo de confianza del 98% para p sea a lo sumo 0,05? Independientemente del valor de \hat{p} .
- c) Plantear una prueba de hipótesis para responder la pregunta inicial del enunciado aclarando las hipótesis adecuadas. Dar el estadístico de prueba. Calcular el valor observado del estadístico de prueba, calcular el p-valor y concluir en el contexto del problema al 1%.

Ejercicio 6: Sean X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución Bernoulli de parámetro p con $0 < p < 1$.

- a) Hallar el estimador \hat{p} por el método de los momentos para p .
- b) El estimador hallado en a) ¿es insesgado para p ? Justifique su respuesta.
- c) ¿Cuál es la varianza del estimador obtenido? Justifique su respuesta.
- d) Un estimador para la varianza de la muestra es $\bar{X}(1 - \bar{X})$. Probar que el estimador no es insesgado para la varianza de la muestra y ¿se puede modificar este estimador para que resulte insesgado?